



Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de Estadística

Tesis Doctoral

Proyección de Tablas de Mortalidad Dinámicas y Análisis Actuarial del Riesgo de Longevidad

Andrés Gustavo Benchimol

Directores:

Irene Albarrán & J. Miguel Marín

Presentada en cumplimiento de los requisitos para el grado de
Doctor en Economía de la Empresa y Métodos Cuantitativos

Madrid, Noviembre 2016

Resumen

Los actuarios que trabajan en compañías de seguros de vida y rentas vitalicias utilizan tablas de mortalidad tanto en tareas relacionadas con la tarificación de las diferentes coberturas, como también con la constitución de reservas y provisiones técnicas. Por su parte, la Seguridad Social y otros organismos utilizan estas tablas en tareas de planificación de los sistemas de previsión social (jubilaciones y pensiones, entre otras prestaciones).

El hecho de que la mortalidad haya mejorado considerablemente es un hecho positivo, pero que no haya sido previsto ha implicado que las aseguradoras se hayan visto forzadas a destinar importantes sumas de capital para mantener sus negocios de rentas vitalicias, con perjuicios en solvencia y rentabilidad, alcanzándose incluso quiebras, así como que se hayan generado importantes desviaciones en los presupuestos de gasto público de los Estados. Por lo tanto, de cara al futuro, es fundamental disponer de procedimientos adecuados para la proyección de la mortalidad, y así contar con tablas de mortalidad dinámicas correctamente calibradas. El objetivo es evitar lo que actualmente ya recibe el nombre de *riesgo de longevidad*, velando por la solvencia y viabilidad de los sistemas previsionales, tanto públicos como privados.

Por otro lado, algunos países están relacionados no sólo política o económicamente, sino también social e, incluso, demográficamente. Esta última característica puede ser aprovechada al hacer proyecciones de las tasas de mortalidad de sus respectivas poblaciones. Así, en el primer conjunto de propuestas que se plantean en esta Tesis, teniendo en consideración un grupo de países relacionados, se propone una especificación jerárquica del modelo de Lee-Carter y se asume que el factor latente que da cuenta de la evolución de la mortalidad es común a todos ellos. Las estructuras jerárquicas son usualmente propias de la estadística bayesiana. Además de una solución bajo este enfoque, se presenta otra bajo el enfoque frecuentista mediante la utilización de una metodología de estimación apropiada para este tipo de estructuras conocida como *data cloning*. Hasta donde se ha investigado, ésta es la primera vez en que esta metodología es aplicada en el campo actuarial. Dicha metodología permite obtener aproximaciones de las estimaciones

de máxima verosimilitud en una estructura jerárquica y los resultados son invariantes a las distribuciones a priori asumidas, eliminando la posible subjetividad del enfoque bayesiano. Ambos modelos se aplican a datos de mortalidad de España, Francia, Italia y Portugal y las predicciones que se obtienen como resultado pueden ser consideradas muy satisfactorias.

El segundo conjunto de propuestas de esta Tesis está relacionado con temas de incertidumbre en la selección de modelos. Con frecuencia se suele elegir un modelo y proceder como si las datos observados hubieran sido generadas por éste. Esta práctica conduce a inferencias que acarrearán la incertidumbre asociada a la elección del modelo, sobreestimando así la fiabilidad de las inferencias, y, más aún, muchas veces se toman decisiones basadas en ellas, que pueden no conducir a los resultados esperados. Este inconveniente puede reducirse mediante técnicas de *model assembling* (ensambles de modelos). Estas técnicas se basan en la combinación de los resultados de diferentes modelos buscando obtener un mejor resultado final. Así, en el segundo conjunto de propuestas se postulan ensambles de modelos tanto bajo enfoque clásico (basados en el criterio de Akaike) como bajo el enfoque bayesiano (basados en las probabilidades a posteriori de cada modelo). Hasta donde se ha investigado, también es la primera vez que estas metodologías son aplicadas en el campo actuarial. Se ha trabajado con los modelos de Lee-Carter, Renshaw-Haberman, Cairns-Blake-Dowd y la generalización de este último incluyendo el efecto cohorte. Las técnicas se aplican a estos modelos con datos de España y las proyecciones de los modelos ensamblados han mostrado mejores propiedades estadísticas que las de cualquier modelo considerado por separado.

Por último, se exponen las consecuencias económicas del riesgo de longevidad si no se toman a tiempo las medidas necesarias, y se evalúa dicho impacto mediante la utilización de las tablas de mortalidad dinámicas construidas con las técnicas propuestas en la Tesis y la pertinente metodología actuarial.

Agradecimientos

En estas líneas quiero hacer un reconocimiento y agradecer a aquellas personas e instituciones que desde diferentes lugares me han ayudado y apoyado y cuya conjunción es lo que hizo posible que hoy esté presentando mi Tesis Doctoral.

En primer lugar, a mis directores, Irene Albarrán y Juan Miguel Marín, así como también a Pablo Alonso, por su invaluable ayuda, estar siempre cuando recurrí a ellos e incondicionalidad. Tuve la suerte de poder contar con tres personas muy valiosas, no sólo a nivel profesional, sino también a nivel personal. Un verdadero privilegio.

A mis padres y a mi hermana Karina por apoyarme en la decisión de hacer el doctorado en el extranjero y por ocuparse de cuestiones que yo desde Madrid no puedo.

A mis compañeros del Departamento de Estadística Martín López Amorós, Ginette Lafit y João Gonçalves Mazzeu por la ayuda que me brindaron y los momentos vividos en esta etapa que nos ha tocado compartir.

A Franco Ferraro, Vanesa Eirin y Denise Sitt por el apoyo y el empuje de siempre a concretar mis sueños.

A Aurea Grané por haberme invitado a exponer parte de este trabajo en la *VII International Conference on Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance 2016*, en París. A Mike Wiper por haber confiado en mí para representar al departamento y a la Universidad en el *Econometric Game 2015*, en Amsterdam. A Wilson Díaz Araujo, director del departamento de estadística de la Universidad Nacional de Trujillo, por haberme invitado a dar la conferencia magistral del II Congreso Internacional de Estadística 2015, en Trujillo (Perú). Y al departamento de economía y estadística de la Universidad de Salerno, por haberme hecho partícipe de su *Actuarial School 2016*, en Salerno (Italia), donde he tenido la oportunidad de interactuar con algunos de los autores citados en la Tesis. Sin lugar a dudas, estas cuatro experiencias han sido los momentos más emocionantes del doctorado.

A la Universidad de Buenos Aires, la Fundación Carolina, la Universidad de Alcalá y, por supuesto, la Universidad Carlos III de Madrid. Todas instituciones públicas que en diferentes momentos de mi vida me han permitido avanzar en mi carrera académica y estar hoy próximo a alcanzar el grado de Doctor.

Y a esta maravillosa ciudad que es Madrid, donde siempre me he sentido en casa.

El trabajo presentado en esta Tesis ha sido patrocinado por el Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto MTM2014-56535-R.

Dedicatoria

A mis padres y a mi hermana Karina.

‘Me interesa el futuro porque es allí donde pasaré el resto de mi vida.’

Woody Allen

Índice

Resumen	i
Agradecimientos	iii
1 Introducción	1
1.1 Motivación y objetivos	1
1.2 Fundamentos de biometría actuarial	8
1.3 Proyección de la mortalidad	16
1.3.1 Los métodos tradicionales: el enfoque determinista	17
1.3.2 Las aportaciones más recientes: el enfoque estocástico	23
1.4 Datos, metodologías y estructura de la Tesis	37
2 Proyección de la Mortalidad utilizando Modelos Jerárquicos	40
2.1 Introducción	40
2.2 Descripción de los datos utilizados	44
2.3 Enfoque bayesiano	46
2.3.1 Especificación del modelo	46
2.3.2 Aplicación del modelo jerárquico bayesiano	50
2.4 Enfoque clásico	67
2.4.1 Metodología <i>data cloning</i>	67
2.4.2 Especificación del modelo	69
2.4.3 Aplicación del modelo jerárquico clásico con <i>data cloning</i>	69
2.5 Consideraciones finales	87

3	Proyección de la Mortalidad utilizando técnicas de <i>Model Assembling</i>	89
3.1	Introducción	89
3.2	Enfoque clásico	92
3.2.1	Método de los pesos de Akaike	92
3.2.2	Especificación del modelo	94
3.2.3	Aplicación del método de los pesos de Akaike	95
3.3	Enfoque bayesiano	108
3.3.1	<i>Bayesian model averaging</i> (BMA)	108
3.3.2	Especificación del modelo	110
3.3.3	Aplicación del BMA	114
3.4	Consideraciones finales	118
4	Valoración del Riesgo de Longevidad	120
4.1	Introducción	120
4.2	Fundamentos de cálculo actuarial de las rentas vitalicias	121
4.3	Análisis de casos	128
4.3.1	Renta vitalicia individual	132
4.3.2	Renta vitalicia extensiva a un tercero	134
4.3.3	Renta vitalicia de último superviviente	136
4.4	Consideraciones finales	139
5	Conclusiones	140
5.1	Resumen de las aportaciones de la Tesis	140
5.2	Futuras líneas de investigación	143

Índice de Tablas

1.1	Tabla de mortalidad	10
1.2	Tabla de mortalidad dinámica	18
2.1	Índices demográficos	45
2.2	Medias a posteriori de los parámetros $\alpha_x^{(j)}$ y $\beta_x^{(j)}$	51
2.3	Medias a posteriori del índice de mortalidad κ_t histórico.	52
2.4	Medias a posteriori del índice de mortalidad κ_t proyectado.	53
2.5	Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Francia.	54
2.6	Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Italia.	55
2.7	Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Portugal.	56
2.8	Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: España.	57
2.9	Perfiles de mortalidad proyectados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 , en los años $t = 2010, \dots, 2029$ para los 4 países estudiados (enfoque bayesiano).	66
2.10	Estimaciones máximo verosímiles de los parámetros $\alpha_x^{(j)}$ y $\beta_x^{(j)}$	71
2.11	Estimaciones máximo verosímiles del índice de mortalidad κ_t histórico.	72
2.12	Índice de mortalidad κ_t proyectado.	73
2.13	Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Francia.	74
2.14	Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Italia.	75

2.15	Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Portugal.	76
2.16	Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: España.	77
2.17	Perfiles de mortalidad proyectados para la edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 , en los años $t = 2010, \dots, 2029$ para los 4 países estudiados (enfoque clásico).	86
3.1	Especificaciones de los modelos LC, RH, CBD y M6.	94
3.2	Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$: Modelo LC.	97
3.3	Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$: Modelo RH.	98
3.4	Intervalos de predicción al 95% de confianza por modelo y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$ Modelo CBD.	99
3.5	Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$: Modelo M6.	100
3.6	Valores AIC_c y pesos de los modelos.	101
3.7	Intervalos de predicción <i>bootstrap</i> al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$	104
3.8	Valores AIC_c y pesos de los modelos.	105
3.9	Perfiles de mortalidad proyectados: método de los pesos de Akaike.	107
3.10	Especificaciones de los modelos LC, RH, CBD y M6.	110
3.11	Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$	115
3.12	Perfiles de mortalidad proyectados: <i>Bayesian model averaging</i>	117
4.1	Tabla de mortalidad período 2010 y tablas de mortalidad proyectadas para la cohorte de 1950 (60 años de edad en 2010) - Hombres.	130
4.2	Tabla de mortalidad período 2010 y tablas de mortalidad proyectadas para la cohorte de 1950 (60 años de edad en 2010) - Mujeres.	131
4.3	Valor actual actuarial de la cobertura del caso 1 de acuerdo a las cuatro metodologías propuestas para proyectar mortalidad.	133
4.4	Valor actual actuarial de la cobertura del caso 2 de acuerdo a las cuatro metodologías propuestas para proyectar mortalidad.	135

4.5	Valor actual actuarial de la cobertura del caso 3 de acuerdo a las cuatro metodologías propuestas para proyectar mortalidad	137
4.6	Pérdidas técnicas esperadas según los modelos propuestos	139
5.1	Síntesis de las metodologías propuestas para proyectar mortalidad.	140

Índice de Figuras

2.1	Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Francia.	58
2.2	Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Italia.	58
2.3	Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Portugal.	59
2.4	Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: España.	59
2.5	Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Francia (enfoque bayesiano).	61
2.6	Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Italia (enfoque bayesiano).	62
2.7	Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Portugal (enfoque bayesiano).	63
2.8	Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: España (enfoque bayesiano).	64
2.9	Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Francia.	78
2.10	Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Italia.	78
2.11	Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Portugal.	79
2.12	Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: España.	79
2.13	Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Francia (enfoque clásico).	81

2.14	Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Italia (enfoque clásico).	82
2.15	Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Portugal (enfoque clásico).	83
2.16	Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: España (enfoque clásico).	84
3.1	Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$	105
3.2	Superficie de mortalidad real y proyectada: método de los pesos de Akaike.	107
3.3	Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$	116
3.4	Superficie de mortalidad real y proyectada: <i>Bayesian model averaging</i> . . .	117

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación y objetivos

Las compañías de seguros de vida asumen diferentes tipos de riesgos: financieros (rendimiento de las inversiones, inflación), biométricos (mortalidad, longevidad, invalidez de los asegurados), comportamiento de los asegurados (rescates de pólizas, impagos de primas, fraudes) y cuantías de gastos.

Dentro de los riesgos biométricos, en particular en aquéllos relacionados con la supervivencia de los asegurados, se pueden distinguir tres casos:

- (a) Un individuo puede vivir más o menos que la media de la población a la cual pertenece. En términos de frecuencia de fallecimientos en la población, puede resultar que la mortalidad observada sea mayor que la esperada en algunos años, y menor en otros, sin que se observe un comportamiento sistemático en tales desviaciones.
- (b) La media de vida en una población puede diferir de lo esperado. En términos de frecuencia de fallecimientos, las tasas de mortalidad observadas en la población

resultan estar sistemáticamente por encima o por debajo de aquellas que se esperaban.

- (c) Las tasas de mortalidad en una población pueden experimentar saltos repentinos debido al surgimiento de condiciones de vida críticas tales como epidemias, desastres naturales, condiciones climáticas severas o guerras, entre otras.

En el caso (a) se observan desviaciones alrededor de las tasas de mortalidad esperadas. Así, el *riesgo de mortalidad*, que es el que se estudia tradicionalmente en el ámbito actuarial de los seguros de vida, constituye un riesgo de fluctuaciones aleatorias. Este riesgo se refiere a la *mortalidad individual* y su gravedad disminuye a medida que el tamaño de la cartera de pólizas se va haciendo lo suficientemente grande hasta convertirse en un riesgo insignificante. Si esto no se consigue en la medida deseada también puede ser cubierto mediante contratos de transferencia de riesgos (reaseguros y retrocesiones¹).

En el caso (b) las desviaciones son respecto de valores esperados de manera unidireccional y, de ahí, su naturaleza sistemática. Esto puede ser el resultado de una mala especificación del modelo de mortalidad o de una evaluación sesgada de los parámetros relevantes. Dentro de este segundo grupo se encuadra el llamado *riesgo de longevidad* o *riesgo de mejora en la mortalidad*. Hay que destacar que este tipo de riesgo hace referencia a la *mortalidad agregada*, entendiendo por tal el nivel general de mortalidad en una población. Por tanto, aumentar el tamaño de la cartera no surte ningún efecto para cubrirse ante este riesgo.

Finalmente, el caso (c), conocido como *riesgo de catástrofe*, es el riesgo de que exista un aumento repentino en la frecuencia de fallecimientos y con efectos a corto plazo. Al igual que en el caso (b), se refiere a la mortalidad agregada. Sin embargo, si se compara con el riesgo de longevidad, este último tiene efectos a largo plazo, y quizás aún permanentes, en tanto que el riesgo de catástrofe tiene un alcance más bien a corto plazo. Cuando

¹En seguros, el término *retrocesión* se refiere a la cesión que hace un reasegurador a otro reasegurador (o *pool* de reaseguradores) de un riesgo previamente asumido.

se trata de seguros de vida se requiere de una cobertura apropiada contra el riesgo de catástrofe. Evidentemente, aumentar el tamaño de la cartera de asegurados no es una medida efectiva para cubrirse ante este riesgo. Pero sí se puede obtener una diversificación mediante la transferencia de riesgos a través de acuerdos de reaseguros y retrocesiones puesto que éstos tienen carácter mundial.

El modelo de mortalidad con el que trabajan los actuarios en las compañías de seguros se denomina *tabla de mortalidad* o *tabla de vida*. Las tablas de mortalidad son instrumentos para estimar probabilidades de supervivencia y fallecimiento, de utilidad en diversos ámbitos y especialmente en el actuarial. En concreto, en la Sección 1.2 se aborda su estudio en detalle. Estas tablas se utilizan para calcular las primas de los seguros de vida, los valores de rentas vitalicias, los beneficios de planes de pensiones, así como también para determinar los valores de las provisiones matemáticas² que deben constituir las compañías de seguros de vida como prueba de solvencia. Cualquier vicio o irregularidad que pudiera existir en las tablas de mortalidad utilizadas está destinado a trasladarse en el futuro a los balances y estados de resultados de las compañías.

Un hecho al que se han estado enfrentando los actuarios en las compañías de seguros de vida es a que las personas viven más de lo esperado de acuerdo con las tablas de mortalidad utilizadas. Puede considerarse que una posible causa haya sido la utilización de especificaciones incorrectas en los modelos para estimar las mejoras en la mortalidad. Así, la mayoría de las proyecciones de la mortalidad para la segunda mitad del siglo XX han subestimado el aumento en la longevidad y las mejoras en la mortalidad observadas en la práctica han superado a las mejoras proyectadas.

Si bien el aumento del tiempo de vida constituye uno de los mayores logros de la humanidad en el último siglo, a la vez, tiene como consecuencia un gran desafío económico y financiero para las próximas décadas. Esto se debe al hecho de que a mayor tiempo de vida mayor es el número de años que las personas que se jubilan pasarán en etapa de re-

²Las *provisiones matemáticas* son pasivos de naturaleza contingente que deben constituir las compañías de seguros de vida por cada póliza que emiten.

tiro, lo cual implica una mayor cuantía de fondos necesarios para solventar las necesidades vitales de estos colectivos.

Desde el punto de vista técnico-actuarial, para garantizar la solvencia de cualquier plan de seguros y su viabilidad es necesario que exista un equilibrio entre el valor actual actuarial³ de las contribuciones que hacen los asegurados durante su etapa de vida activa y el valor actual actuarial de los beneficios que recibirán en su etapa de vida pasiva. Dado que se han subestimado las probabilidades de supervivencia, el resultado ha sido que el valor actuarial de los fondos provistos por los asegurados sea inferior al valor actuarial de los compromisos que tiene la compañía de seguros con ellos y, por tanto, que exista un déficit en la cuantía de fondos necesarios para financiar los beneficios de la etapa pasiva.

Así, las compañías de seguros se han visto forzadas a asignar más capital para sostener sus negocios vigentes de rentas vitalicias con efectos adversos en reservas y rentabilidad y, fundamentalmente, en la solvencia de las compañías. Por tanto, este problema requiere la toma de medidas urgentes. Desde el enfoque actuarial de la gestión de riesgos si bien el riesgo de mortalidad es un riesgo diversificable, el riesgo de longevidad no lo es puesto que los asegurados no son independientes respecto a la fuente de incertidumbre que afecta a toda la cartera de asegurados y, por consiguiente, no puede ser reducido mediante la emisión de un gran número de pólizas.

Las reacciones ante el problema del riesgo de longevidad son principalmente dos. Por un lado, los actuarios están intentando proponer modelos más ajustados teniendo en cuenta la mejora en la mortalidad y prestando mayor atención a los niveles de incertidumbre de las predicciones (ver Lee and Carter (1992), Renshaw and Haberman (2006), Cairns et al. (2006)). Por otro lado, se está imitando a los mercados de capitales en su forma de compartir el riesgo a través de la aparición de instrumentos financieros ligados a la mortalidad (ver, por ejemplo, Cox et al. (2010), Blake et al. (2006) y Lin and Cox (2005)).

³El *valor actual actuarial* es la actualización financiera y biométrica de las obligaciones futuras que están sujetas a la ocurrencia de determinados eventos (en este caso, supervivencia de los asegurados).

El objeto de esta Tesis está relacionado con la primera de estas dos cuestiones, es decir, con la modelización de la mejora en la mortalidad y el desarrollo de tablas de mortalidad que contemplen las mejoras esperadas. Estas tablas en la actualidad ya reciben el nombre propio de *tablas de mortalidad dinámicas* o *tablas de mortalidad proyectadas* en las cuales las tasas proyectadas de mortalidad ya no son sólo función de la edad y el sexo, sino también de la generación a la que pertenecen los individuos. Así, se pretenden estudiar diferentes metodologías para proyectar este tipo de tablas con propósitos actuariales, como también cuantificar el riesgo de longevidad.

El riesgo de longevidad es un tema que hasta principios del siglo XXI no se había comenzado a analizar en profundidad, por lo que las aportaciones en este campo están en continua transferencia entre los académicos y la industria aseguradora. Tanto es así, que este riesgo está contemplado en la Directiva de *Solvencia II* (o Directiva 2009/138/EC)⁴. Esta Directiva establece un marco regulatorio con injerencia sobre las compañías de seguros y reaseguros de los países miembros de la Unión Europea. La Directiva fue adoptada en noviembre de 2009 por el Consejo de la Unión Europea y el Parlamento Europeo pero no entró plenamente en vigor hasta el 1 de enero de 2016 por la Directiva complementaria Omnibus II, del 11 de marzo de 2014. La Directiva 2009/138/EC ha cambiado las normas europeas del Seguro. Su principal objetivo es mejorar el control y la medición de los riesgos (de mercado, operacionales, de crédito y de liquidez) a los que están expuestos las compañías de seguros y reaseguros. Se estructura en tres grandes pilares o principios: Pilar I (medida de activos, pasivos y capital), Pilar II (proceso de Supervisión) y Pilar III (requerimientos de transparencia).

Entre otros aspectos, la Directiva de *Solvencia II* hace referencia al cálculo del *Margen de Solvencia* (*Solvency Capital Requirement, SCR*)⁵. De este modo, contempla el establecimiento de una fórmula estándar para su cálculo pero también prevé la posibilidad

⁴Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II).

⁵El margen de solvencia es como se denomina al capital mínimo necesario que deben disponer las compañías de seguros para hacer frente a las posibles desviaciones de sus negocios.

de que las compañías de seguros desarrollen modelos internos. Por tanto, los modelos presentados en esta Tesis se proponen como herramientas de aplicación directa por parte de los departamentos técnico-actuariales de las compañías de seguros así como también por parte de los organismos supervisores europeos.

Por último, el riesgo de longevidad traspasa los límites del mercado asegurador y de la Seguridad Social. Por ejemplo, se traslada al mercado de *hipotecas inversas* o *hipotecas revertidas* y también al de *life settlements* (también denominado *mercado secundario de pólizas de seguros de vida*).

Una hipoteca inversa es un crédito con garantía inmobiliaria para personas mayores de 65 años que permite convertir en dinero el valor patrimonial que representa la propiedad de su vivienda. Así, en una operación de este tipo, el propietario de un inmueble recibe mensualmente una renta vitalicia que le permite disfrutar en vida del valor de la vivienda, además de su uso normal. Una vez que ocurre fallecimiento del suscriptor de la hipoteca inversa se pueden producir diferentes escenarios y posibilidades, dado que los herederos recibirán tanto la propiedad de la vivienda como la deuda anexa a la misma. La hipoteca inversa está regulada en España por la Ley 41/2007⁶.

En cuanto al *life settlement*, se trata de una operación financiera que consiste en la venta que el titular de una póliza de seguro de vida realiza a un tercero por una cantidad superior al valor de rescate que obtendría de la compañía, pero inferior a la suma asegurada. El comprador se hace cargo del pago de las primas desde que se concreta la operación y espera tener una ganancia al momento del fallecimiento del asegurado y, por tanto, de cobrar la suma asegurada. Pueden existir diversos motivos por los cuales el tenedor de una póliza de seguro de vida puede decidir venderla: no necesitarla ya o desear adquirir una póliza con condiciones diferentes, o bien, que el pago de primas no le resulte asequible. En su mayoría, los productos involucrados en estas transacciones son los de *Vida Universal*

⁶Ley 41/2007, de 7 de diciembre, por la que se modifica la Ley 2/1981, de 25 de marzo, de Regulación del Mercado Hipotecario y otras normas del sistema hipotecario y financiero, de regulación de las hipotecas inversas y el seguro de dependencia y por la que se establece determinada norma tributaria, BOE núm. 294, de 8 de diciembre de 2007.

(*Universal Life*)⁷ y los asegurados suelen ser personas mayores de 65 años.

Tanto en un caso como en el otro, para el inversor es fundamental contar con asesoramiento fiable respecto a la expectativa de vida del propietario del inmueble (en el primer caso) o del titular de la póliza de seguro de vida (en el segundo) de modo que su inversión ofrezca una rentabilidad esperada positiva.

El resto de este capítulo se organiza de la siguiente manera. A continuación, en la Sección 1.2, se presentan brevemente los principales conceptos y se definen las funciones biométricas necesarias para abordar el tema de la proyección de la mortalidad y el riesgo de longevidad. En la Sección 1.3 se hace una revisión de la literatura en lo que a proyección de la mortalidad se refiere, desde los métodos tradicionales hasta las últimas contribuciones sobre la modelización de la mejora en la mortalidad con el fin de mitigar el riesgo de longevidad. Finalmente, en la Sección 1.4 se describen los datos, las metodologías con los que se ha trabajado, y la estructura de la presente Tesis.

⁷Un seguro de Vida Universal es un producto que, además de cobertura en caso de fallecimiento, ofrece diferentes alternativas de ahorro y capitalización.

1.2 Fundamentos de biometría actuarial

En lo que sigue se utilizará la nomenclatura actuarial internacional, ampliamente extendida en la literatura de referencia (ver, por ejemplo, Bowers et al. (1997), Jordan (1991) y London (1997)).

Sea T_x la variable aleatoria “tiempo de vida residual para una persona de edad x ”, y sea ω la *edad límite*, que se define como la primera edad que ningún individuo alcanza con vida. Así, T_x puede tomar cualquier valor entre 0 y $\omega - x$. Y sean $f_x(t)$ su función de densidad, $F_x(t)$ su función de distribución, y $S_x(t)$ su función de supervivencia.

Se define la *probabilidad de supervivencia* como

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= P[T_x \geq t] \\ &= 1 - F_x(t) \\ &= S_x(t), \end{aligned}$$

es decir, la probabilidad de que un individuo de edad x alcance con vida la edad $x + t$.

Se define la *probabilidad inmediata de fallecimiento* como

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= P[T_x < t] \\ &= F_x(t) \\ &= 1 - {}_t p_x, \end{aligned}$$

es decir, la probabilidad de que un individuo de edad x no alcance con vida la edad $x + t$.

Y se define la *probabilidad diferida de fallecimiento* como

$$\begin{aligned} {}_h|tq_x &= P[h \leq T_x < h+t] \\ &= S_x(h) - S_x(h+t) \\ &= {}_hp_x - {}_{h+t}p_x \end{aligned}$$

es decir, la probabilidad de que un individuo de edad x alcance con vida la edad $x+h$, pero no la edad $x+h+t$.

Los modelos tabulares

En la profesión actuarial es habitual trabajar con tablas de mortalidad. Una tabla de mortalidad es un modelo que representa la evolución de un colectivo cerrado de vidas homogéneas e independientes presentando puntos anuales de fallecimiento y en el que se asume que estos son sólo función de la edad. De esta manera, la tabla de mortalidad se muestra como una sucesión finita decreciente $\{l_x\}_{x=0,\dots,\omega-1}$ donde l_x representa el número de sobrevivientes a cada edad x , y l_0 , conocida como la *raíz* de la tabla, es el número de personas que integran ese colectivo al inicio (recién nacidos). Al número de fallecidos entre las edades x y $x+1$ se denota como d_x .

A partir de una tabla de mortalidad es posible calcular las probabilidades previamente definidas:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \frac{l_{x+t}}{l_x} \\ {}_tq_x &= \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \\ {}_h|tq_x &= \frac{l_{x+h} - l_{x+h+t}}{l_x} \end{aligned}$$

También es frecuente encontrar tablas de mortalidad definidas como una sucesión de probabilidades anuales de fallecimiento: $\{q_x\}_{x=0,\dots,\omega-1}$.

Así, una tabla de mortalidad tiene el aspecto como el de la Tabla 1.1.

<i>Edad</i>	l_x	q_x
0	l_0	q_0
1	l_1	q_1
2	l_2	q_2
...
x	l_x	q_x
$x + 1$	l_{x+1}	q_{x+1}
$x + 2$	l_{x+2}	q_{x+2}
...
$\omega - 2$	$l_{\omega-2}$	$q_{\omega-2}$
$\omega - 1$	$l_{\omega-1}$	1

Tabla 1.1: Tabla de mortalidad

Los modelos continuos

De manera análoga, se puede definir la función l_x en el dominio de tiempo continuo entre 0 y ω , que indica el número de supervivientes en cada instante x a partir de un colectivo inicial de l_0 recién nacidos.

En este esquema continuo se define la *tasa instantánea de mortalidad* como

$$\begin{aligned}
 \mu_x &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P[T_x \leq t]}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{{}_t q_x}{t} \\
 &= \frac{f_x}{S_x} \\
 &= \frac{-1}{l_x} \frac{dl_x}{dx}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de supervivencia en función de la tasa instantánea de mortalidad es

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

Se define la *tasa central de mortalidad* como

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{d_x}{L_x}$$

que es un promedio ponderado de las tasas instantáneas de mortalidad entre las edades x y $x + 1$, siendo los pesos los correspondientes valores asociados de la función l_x . El numerador $d_x = \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt$ representa el número de individuos fallecidos entre las edades x y $x + 1$, y el denominador $L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$, conocido como *tiempo de exposición*, representa el tiempo total agregado que viven entre las edades x y $x + 1$ aquellos individuos que alcanzaron con vida la edad x .

Relación entre la probabilidad de fallecimiento y la tasa central de mortalidad

La probabilidad de fallecimiento q_x y la tasa central de mortalidad m_x suelen ser valores muy cercanos. En la literatura actuarial, para pasar del campo continuo al discreto, y viceversa, se suelen presentar diferentes supuestos para edades fraccionarias (ver Bowers et al. (1997) o London (1997)). En particular, el *supuesto de μ constante* asume que la tasa instantánea de mortalidad es constante a lo largo de cada edad entera. Es decir, que para todo t , $0 \leq t \leq 1$:

$$\mu_{x+t} = \mu_x,$$

lo cual implica que

$$m_x = \mu_x,$$

y que

$$\begin{aligned} q_x &= 1 - p_x \\ &= 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+s} ds} \\ &= 1 - e^{-\mu_x}, \end{aligned}$$

y por tanto, la relación entre la tasa central de mortalidad y la probabilidad de fallecimiento resulta

$$m_x = -\log(1 - q_x). \quad (1.1)$$

La esperanza de vida

En el campo continuo, la *esperanza de vida residual* para una persona de edad x se denota como \bar{e}_x y se define como

$$\begin{aligned} \bar{e}_x = E[T_x] &= \int_0^\infty t f_x(t) dt \\ &= \int_0^\infty t {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes se llega a una expresión en términos de la función de supervivencia:

$$\bar{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt.$$

Como caso particular, cuando $x = 0$ se obtiene la *esperanza de vida al nacer*:

$$\bar{e}_0 = \int_0^\infty {}_t p_0 dt.$$

Se puede observar que para un individuo de edad x la edad al fallecimiento puede ser expresada como $x + T_x$ y la edad esperada al fallecimiento está dada por $x + E[T_x] = x + \bar{e}_x$.

Para todo x , $x > 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$x + \bar{e}_x \geq \bar{e}_0.$$

En el campo discreto, cuando se trabaja con una tabla de mortalidad, se denomina *esperanza de vida abreviada* para una persona de edad x a la cantidad de años enteros

que se esperan de vida residual. Se denota por e_x y se define como

$$e_x = E[T_x] = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} t {}_t|1q_x,$$

donde sólo se computan años enteros vividos. Desarrollando la suma y agrupando se obtiene que

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_tp_x.$$

Como caso particular, cuando $x = 0$ se obtiene la *esperanza de vida abreviada al nacer*:

$$e_0 = \sum_{t=1}^{\omega-1} {}_tp_0.$$

En el campo discreto, si se quiere estudiar el tiempo hasta el fallecimiento se suele trabajar con algún supuesto (puesto que las tablas de mortalidad están construidas usualmente con puntos de eliminación anual). Si se asume que los fallecimientos ocurren a mitad de año y la *esperanza de vida completa* en el campo discreto se define como:

$${}^{\circ}e_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} \left(t + \frac{1}{2}\right) {}_t|1q_x = e_x + \frac{1}{2}.$$

Y la esperanza de vida completa al nacer,

$${}^{\circ}e_0 = \sum_{t=0}^{\omega-1} \left(t + \frac{1}{2}\right) {}_t|1q_0 = e_0 + \frac{1}{2}.$$

Estas últimas expresiones puede ser tomadas como aproximaciones de \bar{e}_x y \bar{e}_0 respectivamente y resultan útiles cuando sólo se dispone de una tabla de mortalidad. De hecho, en el esquema continuo, bajo el supuesto de que la distribución de fallecimientos es uniforme a lo largo de cada edad, resulta $\bar{e}_x = {}^{\circ}e_x$.

Leyes de mortalidad

Las leyes de mortalidad son fórmulas analíticas que intentan representar el patrón de la mortalidad. Se pueden definir directamente sobre la función l_x , o sobre cualquier otra función biométrica, como μ_x , o bien sobre una función de ellas como por ejemplo el cociente de probabilidades q_x/p_x .

Cuando se utiliza una ley de mortalidad para ajustar datos observados, el patrón de la mortalidad en función de la edad se resume en un número pequeño de parámetros. Esto tiene la ventaja de reducir la dimensión del problema sin demasiada pérdida de información siempre y cuando el ajuste sea razonablemente bueno.

Existe en la literatura una amplia variedad de leyes de mortalidad. A continuación se presentan las más utilizadas, las cuales están definidas sobre la tasa instantánea de mortalidad (aunque podrían estar definidas sobre otra función).

La *ley de Gompertz* fue propuesta en 1825. Su expresión es

$$\mu_x = B c^x,$$

con $B > 0$ y $c > 1$. Una notación equivalente que se suele utilizar también es

$$\mu_x = \alpha e^{\beta x},$$

con $\alpha, \beta > 0$. La Ley de Gompertz se utiliza para representar la mortalidad en edades avanzadas.

La *primera ley de Makeham* propuesta en 1867 es una generalización de la ley de Gompertz y su expresión es

$$\mu_x = A + B c^x,$$

donde $A > 0$ es un término independiente de la edad y representa la mortalidad que

no tiene que ver con el envejecimiento (por ejemplo, la debida a los accidentes). Una notación equivalente es

$$\mu_x = \gamma + \alpha e^{\beta x}.$$

La expresión de la *segunda ley de Makeham* propuesta en 1890 es la siguiente

$$\mu_x = A + Hx + B c^x,$$

y constituye un paso más en la generalización de la ley de Gompertz donde se añade un término más que depende linealmente de la edad.

Forfar et al. (1988) propusieron, como una generalización de las anteriores leyes, lo que denominaron *modelos Gompertz-Makeham*, mediante la siguiente formulación:

$$\mu_x = \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i x^i + \exp\left[\sum_{j=0}^{s-1} \beta_j x^j\right]. \quad (1.2)$$

Puede observarse que cuando $r = 0$ el término polinómico se anula y cuando $s = 0$ se anula el término exponencial. Al modelo general del tipo (1.2) se denota como GM(r, s).

Se puede observar que la ley de Gompertz es el caso particular GM(0,2), la primera ley de Makeham es el GM(1,2), en tanto que la segunda ley de Makeham es el GM(2,2).

Otras leyes de mortalidad que aparecen en la literatura son las leyes de De Moivre, Lazarus, Thiele, Perks I y II, Weibull, Beard, Barnett, Heligman-Pollard I y II (ver Bowers et al. (1997) y Pitacco et al. (2009)).

1.3 Proyección de la mortalidad

Existe en la literatura una gran variedad de modelos estadísticos que se aplican para proyectar mortalidad. Estos modelos van desde los modelos de regresión básicos (en los cuales tanto la edad como el tiempo son vistos como variables explicativas) hasta modelos no paramétricos (ver Tabeau et al. (2001), Booth (2006), Benjamin and Pollard (1993) y Hyndman and Ullah (2007)).

Cuando se trabaja en un contexto dinámico se expresan las funciones definidas en la Sección 1.2 en función del (futuro) año calendario t . En un esquema general, las funciones biométricas se reescriben como $\Gamma(x, t)$. Así, por ejemplo, la probabilidad de fallecimiento para una persona de edad x no sólo es función de la edad x , sino también del año calendario t . Por su parte, las proyecciones de las funciones biométricas están condicionadas por la restricción $\Gamma(x, t) \mid t > t^*$, donde t^* denota el año calendario corriente o el año calendario más reciente para el cual se dispone de información fiable. Al año t^* se lo denomina *año base*. Las proyecciones de las funciones biométricas se construyen mediante la aplicación de procedimientos estadísticos que contemplen la experiencia pasada de la mortalidad.

A continuación se presentan los métodos tradicionales para aquellos casos en los que existen datos históricos y, posteriormente, se presentan los modelos estocásticos de proyección de mortalidad.

1.3.1 Los métodos tradicionales: el enfoque determinista

Para proyectar la mortalidad en los años futuros los métodos tradicionales procuran describir datos históricos y extrapolar tendencias pasadas. Estos métodos difieren según se esté trabajando bajo un esquema discreto o continuo.

Esquema discreto: tablas de mortalidad dinámicas

Si se trabaja con las variables discretas edad y año calendario, $\Gamma(x, t)$ puede ser representado por una matriz cuyas filas corresponden a las edades y las columnas a los años calendario. Por ejemplo, sea $\Gamma(x, t) = q_x(t)$, donde $q_x(t)$ denota la probabilidad en el año t de que un individuo de edad x no alcance con vida la edad $x + 1$. En la Tabla 1.2 se presenta el aspecto que tiene una tabla de mortalidad dinámica. Los elementos de esta tabla se pueden leer en términos de tres *arrays*:

- (a) *array* vertical: $q_0(t), q_1(t), \dots, q_x(t), \dots$, donde cada columna constituye la *tabla de mortalidad por período* correspondiente a cada año t .
- (b) *array* diagonal: $q_0(t), q_1(t + 1), \dots, q_x(t + x), \dots$, donde cada diagonal constituye la *tabla de mortalidad por cohorte*⁸ cuyo año de nacimiento es cada año calendario t .
- (c) *array* horizontal: $q_x(t - 1), q_x(t), q_x(t + 1), \dots$, donde cada fila constituye un *perfil de mortalidad* para cada edad x .

⁸En demografía, el término *cohorte* se utiliza para referirse a un conjunto de personas que experimentan un determinado acontecimiento en un determinado período de tiempo. En este caso particular, se está haciendo referencia a una generación de individuos nacidos en un mismo año.

$Edad \backslash \tilde{A}ño$	\dots	$t - 2$	$t - 1$	t	$t + 1$	$t + 2$	\dots
0	\dots	$q_0(t - 2)$	$q_0(t - 1)$	$q_0(t)$	$q_0(t + 1)$	$q_0(t + 2)$	\dots
1	\dots	$q_1(t - 2)$	$q_1(t - 1)$	$q_1(t)$	$q_1(t + 1)$	$q_1(t + 2)$	\dots
2	\dots	$q_2(t - 2)$	$q_2(t - 1)$	$q_2(t)$	$q_2(t + 1)$	$q_2(t + 2)$	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x	\dots	$q_x(t - 2)$	$q_x(t - 1)$	$q_x(t)$	$q_x(t + 1)$	$q_x(t + 2)$	\dots
$x + 1$	\dots	$q_{x+1}(t - 2)$	$q_{x+1}(t - 1)$	$q_{x+1}(t)$	$q_{x+1}(t + 1)$	$q_{x+1}(t + 2)$	\dots
$x + 2$	\dots	$q_{x+2}(t - 2)$	$q_{x+2}(t - 1)$	$q_{x+2}(t)$	$q_{x+2}(t + 1)$	$q_{x+2}(t + 2)$	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$\omega - 1$	\dots	$q_{\omega-1}(t - 2)$	$q_{\omega-1}(t - 1)$	$q_{\omega-1}(t)$	$q_{\omega-1}(t + 1)$	$q_{\omega-1}(t + 2)$	\dots

Tabla 1.2: Tabla de mortalidad dinámica

Proyección por extrapolación de funciones biométricas

Un procedimiento de extrapolación tiene por objetivo *derivar* patrones futuros de mortalidad a partir de una base de datos procedentes del pasado. Por ejemplo, si se cuenta con una tabla de mortalidad dinámica, cada fila de la tabla es una sucesión que representa el perfil de mortalidad observado para la edad x . Si se asume que el patrón observado en el pasado puede ser modelizado y se establece el supuesto de que dicho patrón continuará en los próximos años, mediante el ajuste a una función apropiada, se puede extrapolar la mortalidad futura. Este procedimiento puede ser aplicado a cualquier otra función biométrica, no sólo a las probabilidades de fallecimiento.

La selección del número de años de observación con los que se va a trabajar es una decisión crítica. Aún en el caso en el que existan datos disponibles para un número elevado de años puede que sea más razonable seleccionar una muestra con menor tamaño de datos recientes.

La extrapolación de los perfiles de mortalidad representa un caso particular del *enfoque horizontal* de la predicción de la mortalidad y puede ser aplicado a otras funciones o cantidades, además de las probabilidades de fallecimiento. Este enfoque horizontal implica que las extrapolaciones son independientes para cada edad x , lo cual puede conducir a

inconsistencias en el patrón proyectado de la mortalidad. Por ello, una vez obtenidas las proyecciones, puede ser necesario un ajuste posterior.

Factores de mejora de la mortalidad

En el ámbito de los seguros se suele utilizar un recurso sencillo y simplificador para ir ajustando periódicamente las probabilidades de fallecimiento a partir de una tabla de mortalidad de un año base t^* .

Dadas unas probabilidades de fallecimiento $q_x(t^*)$ y $q_x(t)$ para $t > t^*$ se puede expresar la segunda expresión en función de la primera:

$$q_x(t) = q_x(t^*) \lambda_{x,t-t^*},$$

donde la cantidad $\lambda_{x,t-t^*}$ se denomina *factor de mejora de la mortalidad* para la edad x en el intervalo (t^*, t) . Recibe este nombre puesto que se espera que sea menor que 1 debido a la tendencia actual decreciente de los perfiles de mortalidad.

Las predicciones de mortalidad se pueden obtener trabajando con el factor de mejora si se asume que el patrón observado en dichos factores continuará estable en el futuro (ver Renshaw and Haberman (2000) y Sithole et al. (2000)).

Aproximación exponencial

La aproximación exponencial se utiliza ampliamente en la práctica actuarial. Si los perfiles de mortalidad observados muestran un decrecimiento aproximadamente exponencial a lo largo del tiempo, se puede hallar para cada edad x un valor r_x tal que para $h = 1, 2, \dots, n - 1$, se tiene:

$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \approx r_x^{t_{h+1} - t_h}. \quad (1.3)$$

Si se estima el parámetro r_x para cada edad x , entonces es posible obtener las probabilidades ajustadas $\hat{q}_x(t)$.

Como observación, de la expresión (1.3) se desprende que para $r_x < 1$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_x(t) = 0,$$

lo cual carece de sentido. Si bien la proyección de la mortalidad está restringida a un intervalo temporal finito, puede resultar más realista asignar un valor positivo al límite de la probabilidad de fallecimiento. Para ello puede plantearse una fórmula con una mortalidad asintótica.

Se puede asumir que la probabilidad de fallecimiento para una persona de edad x alcanza en el límite una proporción $\alpha_x > 0$ de la probabilidad $q_x(t^*)$.

Así, la probabilidad de fallecimiento para una persona de edad x en el año t en función de la probabilidad de fallecimiento en el año base t^* puede expresarse como

$$q_x(t) = q_x(t^*) [\alpha_x + (1 - \alpha_x)r_x^{t-t^*}].$$

El factor de mejora en este caso es

$$\lambda_{x,(t-t^*)} = \alpha_x + (1 - \alpha_x)r_x^{t-t^*},$$

y la probabilidad asintótica de fallecimiento es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_x(t) = \alpha_x q_x(t^*).$$

Se puede establecer una fórmula general de la aproximación exponencial:

$$q_x(t) = a_x + b_x c_x^t,$$

donde los parámetros a_x , b_x y c_x dependen de la edad x y son independientes del año calendario t .

A modo de ejemplo, la *fórmula de Sachs*,

$$q_x(t) = q_x(t^*) a^{\frac{t-t^*}{x+b}},$$

donde a y b son constantes y $a^{\frac{t-t^*}{x+b}}$ representa el factor de mejora, es un caso particular de la aproximación exponencial.

Otras aproximaciones

Las mejoras observadas en la mortalidad se pueden modelizar de otras maneras. Asimismo, la aproximación exponencial puede utilizarse para ajustar otras funciones biométricas, no sólo las probabilidades anuales de fallecimiento.

Otras aproximaciones sugeridas en la literatura (ver Pitacco et al. (2009)) o utilizadas en determinadas aplicaciones son la aproximación hiperbólica (1.4), la aproximación polinómica (1.5) y la aproximación logística (1.6):

$$q_x(t) = a_x + \frac{b_x}{t} \quad (1.4)$$

$$q_x(t) = \sum_{h=0}^p a_{x,h} t^h \quad (1.5)$$

$$q_x(t) = \frac{e^{G_x(t)}}{1 + e^{G_x(t)}} \quad (1.6)$$

donde $G_x(t)$ es un polinomio en t para cada edad x , es decir,

$$G_x(t) = \sum_{h=0}^p c_{x,h} t^h.$$

Todos estos métodos basados en el análisis de los perfiles de mortalidad constituyen

ejemplos del enfoque horizontal.

Utilización de la tabla de mortalidad dinámica

Para un año t dado, las probabilidades de fallecimiento correspondientes a un individuo de edad x se obtienen a partir de la diagonal de la matriz proyectada, es decir, $q_x(t), q_{x+1}(t+1), \dots$

Por tanto, si se denota como ${}_k p_x^{\searrow}(t)$ a la probabilidad proyectada de que un individuo de edad x en el año t alcance con vida la edad $x+k$, se calcula como

$${}_k p_x^{\searrow}(t) = \prod_{j=0}^{k-1} [1 - q_{x+j}(t+j)] .$$

La flecha diagonal en el superíndice indica que se está trabajando con las probabilidades correspondientes a la cohorte a la que pertenece el individuo, es decir, las que se ubican en la diagonal correspondiente de la tabla de mortalidad proyectada. Su esperanza de vida completa (bajo el supuesto de distribución uniforme de fallecimientos) es

$${}^{\circ} e_x^{\searrow}(t) = \sum_{k=1}^{\omega-x-1} {}_k p_x^{\searrow}(t) + \frac{1}{2} .$$

Asimismo, los valores de las primas de seguros y de las provisiones matemáticas *técnicamente correctos* deberían ser calculados con este *enfoque diagonal* (por cohorte).

Esquema continuo: leyes de mortalidad dinámicas

Cuando se utiliza una ley de mortalidad para ajustar los datos observados, el patrón de la mortalidad se resume en un conjunto de parámetros. Por tanto, la proyección puede ser aplicada al conjunto de parámetros en vez de al conjunto de probabilidades específicas para cada edad, lo cual implica una reducción considerable de la dimensión del problema de predicción (ver Felipe et al. (2002), Wetterstrand (1981) y Olivieri (2007))

En el contexto dinámico, el año calendario t entra al modelo mediante sus parámetros que pasan a depender del tiempo. Para cada año calendario t_h , donde $h = 1, \dots, n$, se estiman los parámetros mediante métodos clásicos (mínimos cuadrados o máxima verosimilitud) de manera tal que se obtiene un conjunto de n estimaciones de cada parámetro del modelo. Las tendencias en los parámetros son modelizadas por medio de alguna función matemática y se estima así el conjunto de parámetros en el año t .

Se puede observar que el procedimiento anteriormente descrito sigue un *enfoque vertical* en el sentido de que los parámetros estimados corresponden a la ley de mortalidad asociada a cada tabla de mortalidad por periodo.

También se puede seguir un *enfoque diagonal*, es decir, estimando los parámetros correspondientes a la ley de mortalidad asociada a cada tabla de mortalidad por cohorte. En este caso, los parámetros dependen del año de nacimiento $\tau = t - x$.

1.3.2 Las aportaciones más recientes: el enfoque estocástico

Bajo el enfoque estocástico, se considera que la mortalidad observada fue tan sólo uno de los posibles resultados de un fenómeno aleatorio, de la misma manera que el patrón de mortalidad en el futuro es tratado como aleatorio.

Un punto importante a destacar de este enfoque es que, mientras que con los modelos tradicionales se obtienen estimaciones puntuales de las tasas de mortalidad, los métodos estocásticos contemplan fluctuaciones aleatorias en la mortalidad permitiendo, además, la estimación por intervalos.

Este enfoque estocástico del patrón de mortalidad sólo se encuentra en la literatura reciente, con aplicaciones a temas de rentas vitalicias y planes de pensiones, así como a *derivados* financieros y bonos ligados a la longevidad (ver Olivieri and Pitacco (2008), Blake et al. (2006) y Cairns et al. (2006)).

El modelo de Lee-Carter (LC)

Lee and Carter (1992) propusieron un modelo para describir el cambio en la mortalidad en función de un índice temporal. La metodología aplicada por estos autores constituye una de las propuestas más influyentes en la literatura reciente sobre proyección de la mortalidad.

Sea $m_x(t)$ la tasa central de mortalidad para la edad x en el año t . La especificación del modelo LC es la siguiente:

$$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (1.7)$$

donde los parámetros α_x describen el patrón de la mortalidad promedio de cada edad, que es independiente del tiempo en tanto que los parámetros β_x describen las desviaciones respecto de tal patrón promedio cuando κ_t varía. La variable independiente κ_t constituye un *índice de mortalidad* y describe el cambio en el nivel de mortalidad a través del tiempo. Por último, $\varepsilon_{x,t}$, el término de error denota las desviaciones aleatorias no explicadas por el modelo y se asume que tiene media 0 y varianza constante σ_ε^2 .

El modelo (1.7) no es equivalente a una regresión lineal simple puesto que no hay ninguna variable independiente observable.

El índice temporal κ_t es una variable latente y recoge lo que se conoce como *efecto periodo* y añade un nuevo factor al análisis de la mortalidad, además del *efecto edad* que era el principal que se estaba considerando hasta entonces. Este efecto periodo explica los cambios en la mortalidad que se deben a eventos que afectan a todos los individuos de todas las edades a lo largo del tiempo. Los más importantes posiblemente estén vinculados a avances de la medicina tales como antibióticos, vacunas y demás desarrollos que han repercutido favorablemente a lo largo del tiempo en la mortalidad de todas las edades. Sin embargo, también puede haber eventos negativos tales como las catástrofes naturales, las epidemias o las guerras.

El modelo (1.7) es particularmente útil cuando se cuenta sólo con un conjunto de datos $\widehat{m}_x(t)$, lo cual es fácilmente obtenible a partir de datos censales.

El producto $\beta_x \kappa_t$ indica que se asume que no existe interacción entre las variables *edad* y *tiempo*: los parámetros β_x son fijos a lo largo del tiempo y los parámetros κ_t son fijos a lo largo de las edades.

Por otro lado, el modelo de Lee-Carter difiere de las leyes de mortalidad en que la dependencia respecto de la edad se articula mediante una secuencia de parámetros α_x y β_x .

Los parámetros se pueden estimar por máxima verosimilitud utilizando el primer elemento de la descomposición de valores singulares de la matriz

$$Z = \begin{pmatrix} \log [\widehat{m}_{x_1}(t_1)] - \widehat{\alpha}_{x_1} & \cdots & \log [\widehat{m}_{x_1}(t_n)] - \widehat{\alpha}_{x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \log [\widehat{m}_{x_m}(t_1)] - \widehat{\alpha}_{x_m} & \cdots & \log [\widehat{m}_{x_m}(t_n)] - \widehat{\alpha}_{x_m} \end{pmatrix}.$$

Como el sistema (1.7) resulta compatible indeterminado se deben imponer dos restricciones adicionales sobre los parámetros α_x , β_x y κ_t . La indeterminación del modelo LC se debe a que la verosimilitud asociada al modelo tiene un número infinito de máximos equivalentes, cada uno de los cuales genera las mismas proyecciones. Por lo tanto, la elección de las restricciones es arbitraria y no tiene impacto en la calidad del ajuste ni en las proyecciones de la mortalidad.

Lee and Carter (1992) propusieron las restricciones

$$\begin{aligned} \sum_x \beta_x &= 1, \\ \sum_t \kappa_t &= 0, \end{aligned}$$

lo cual implica la selección de uno de esos máximos equivalentes.

Bajo este conjunto de restricciones, α_x resulta ser el valor medio del logaritmo de la tasa central de mortalidad para la edad x en la muestra considerada y β_x la proporción del cambio en el total de los logaritmos de las tasas centrales de mortalidad atribuible a la edad x .

En la práctica, una vez obtenidas las estimaciones $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$ y $\hat{\kappa}_t$, la predicción de la mortalidad se puede hacer considerando los valores de κ_t como un *random walk* (*paseo aleatorio*) con *drift* (*deriva*):

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \theta + \omega_t.$$

Así, si se tienen datos hasta un año dado t^* , las predicciones de las tasas de mortalidad se computan para t tal que $t > t^*$ como

$$\hat{m}_x(t) = \exp \left[\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t \right].$$

Sustituyendo y reordenando los términos se obtiene que

$$\hat{m}_x(t) = m_x(t^*) \exp \left[\hat{\beta}_x (\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t^*}) \right],$$

expresión que vincula la tasa central de mortalidad proyectada con la del año base a través de un factor de mejora como los presentados en la Sección 1.3.1.

De esta manera, la tasa central de mortalidad $m_x(t)$ depende de una serie temporal, lo cual permite utilizar la metodología de Box-Jenkins de series temporales para proyectar sus valores futuros.

Como comentario final cabe mencionar que las estimaciones de los parámetros α_x , β_x y κ_t también pueden ser obtenidas de manera recursiva utilizando un algoritmo de Newton-Raphson y evitando, así, la descomposición de valores singulares de la matriz Z tal como lo plantearon Lee and Carter (1992) originalmente.

El modelo de Renshaw-Haberman (RH)

Renshaw and Haberman (2003) argumentaron que el modelo *edad-período* (*age-period model*) de Lee-Carter no siempre ajusta con precisión los datos empíricos. Años más tarde, Renshaw and Haberman (2006) propusieron una extensión del modelo de Lee-Carter mediante la incorporación de un conjunto de un parámetros que recogen el *efecto cohorte*.

El efecto cohorte explica una variación en la mortalidad que una generación experimenta debido a cambios sociales o de contexto respecto a las generaciones previas y/o posteriores y que se prolonga a lo largo del tiempo en dicha generación. Puede surgir por diversos motivos. Por ejemplo, diferentes hábitos de consumo de tabaco entre generaciones, una peor nutrición en los primeros años de vida de las personas durante un período de guerra respecto a los años previos y posteriores (como puede ser el caso de la Segunda Guerra Mundial), generaciones que se vieron beneficiadas por haber nacido mientras se desarrollaba en su país un servicio de salud público o que crecieron en un momento en que la investigación médica avanzó de manera considerable en la disminución de las tasas de mortalidad infantil.

Este modelo constituye hoy en día el modelo de referencia en la modelización de la mortalidad con efecto cohorte, habiendo sido el primero de una serie de modelos conocidos como *edad-período-cohorte* (*age-period-cohort models*)

La especificación del modelo RH es la siguiente:

$$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \beta_x^{[1]} \kappa_t + \beta_x^{[2]} \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t}, \quad (1.8)$$

donde los parámetros α_x tienen el mismo significado que en el modelo de Lee-Carter, κ_t , al igual que en el modelo LC, es una serie temporal latente que recoge el efecto período, y la novedad es el factor γ_{t-x} que es una serie temporal latente que recoge el efecto cohorte.

Al igual que en el modelo de Lee-Carter, también es necesario imponer un conjunto de restricciones para poder estimar los parámetros:

$$\begin{aligned}\sum_t \kappa_t &= 0, \\ \sum_x \beta_x^{[1]} &= 1, \\ \sum_t \gamma_{t-x} &= 0, \\ \sum_x \beta_x^{[2]} &= 1.\end{aligned}$$

Una vez impuestas estas restricciones se fija una solución particular y se obtienen las estimaciones $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x^{(1)}$, $\hat{\beta}_x^{(2)}$, $\hat{\kappa}_t$ y $\hat{\gamma}_{t-x}$.

El modelo *RH* asume que κ_t y γ_t siguen *random walks* con *drifts*, respectivamente:

$$\begin{aligned}\kappa_t &= \kappa_{t-1} + \theta_1 + \omega_{1t}, \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1} + \theta_2 + \omega_{2t}.\end{aligned}$$

Utilizando la metodología de Box-Jenkins se proyectan los valores futuros $\hat{\kappa}_t$ y $\hat{\gamma}_{t-x}$. Y de manera análoga a como se explicó para el modelo LC, si se tienen datos hasta un año dado t^* , las predicciones del modelo RH de las tasas de mortalidad se calculan para t donde $t > t^*$ como

$$\hat{m}_x(t) = \exp \left[\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x^{(1)} \hat{\kappa}_t + \hat{\beta}_x^{(2)} \hat{\gamma}_{t-x} \right].$$

Otras extensiones del modelo de Lee-Carter

El modelo de Lee-Carter constituye el primero de una serie de modelos, siendo una de las propuestas más influyentes en la actualidad en temas de proyección de la mortalidad. Se han planteado muchas extensiones, generalizaciones y propuestas de mejoras, basadas en las ideas de la metodología del modelo de Lee-Carter. A continuación se analizan algunas

de las más utilizadas.

Teniendo en cuenta que las tendencias en la mortalidad pueden ser semejantes entre poblaciones, puede resultar apropiado hacer predicciones de la mortalidad para una población en conjunto con otra. Li and Lee (2005) modificaron el modelo LC para generar predicciones de la mortalidad para un grupo de poblaciones. Dado que los actuarios en las compañías de seguros trabajan con tablas de mortalidad diferenciadas por género, la aplicación más directa de este enfoque es modelizar la mortalidad en una población según el género. Así, la extensión más sencilla del modelo de Lee-Carter es utilizar los mismos parámetros β_x y κ_t tanto para hombres como para mujeres y con parámetros α_x dependientes del género como plantearon Li and Lee (2005). En cambio, Carter and Lee (1992) (que también plantearon un modelo diferenciado por género) usaron los mismos parámetros κ_t para ambos sexos y parámetros α_x y β_x específicos para cada género.

Por su parte, Delwarde et al. (2006) analizaron el patrón de decrecimiento en la mortalidad en cinco países: Francia, Alemania, Japón, Reino Unido y Estados Unidos. En este modelo cada país es tratado como una variable explicativa y se analiza el patrón y cambios de la mortalidad por país, así como el patrón general. Como en el modelo LC, la extrapolación del índice κ_t permite calcular las tasas de mortalidad por edad, país, género y año. El principal interés de este método es la estimación de una única serie temporal (o dos si el género se trata por separado) a partir de la cual se calculan tasas de mortalidad para todos los países, edades y años.

Por otro lado, en una población, las tasas de mortalidad $q_x(t)$ generalmente tienden a crecer o decrecer de forma conjunta a lo largo del tiempo. La especificación (1.7) da cuenta de esta tendencia al modelizar los cambios en las tasas de mortalidad a lo largo del tiempo de manera tal que éstos son recogidos por el factor κ_t . La estrategia de Lee and Carter (1992) implica que las tasas de mortalidad modelizadas están perfectamente correlacionadas entre las diferentes edades. Como señala Lee (2000), las tasas de descenso en los $\log[m_x(t)]$ en las diferentes edades están dadas por $\beta_x(\kappa_t - \kappa_{t-1})$ de manera tal que

si se calcula el cociente entre las tasas de descenso para dos edades x_1 y x_2 éste se mantiene constante a lo largo del tiempo. Pero en la práctica, la velocidad relativa del descenso entre las diferentes edades no suele ser constante. En tal caso, la versión extendida del modelo de Lee-Carter introducida por Booth et al. (2002) o el enfoque planteado por Cairns et al. (2006) que se presentan a continuación pueden resultar preferibles.

Booth et al. (2002) señalaron que el enfoque original de Lee and Carter (1992) hace uso sólo del primer término de la descomposición de valores singulares de la matriz Z y que el segundo término y los siguientes podrían ser incorporados en el modelo. El modelo ampliado puede expresarse como

$$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \sum_{j=1}^r \beta_x^{[j]} \kappa_t^{[j]} + \varepsilon_{x,t}, \quad (1.9)$$

donde r es el rango de la matriz Z .

En esta especificación las tasas de mortalidad modelizadas para las diferentes edades están correlacionadas, pero ya no se trata de una correlación perfecta como en la especificación de Lee-Carter.

Hyndman and Ullah (2007), por su parte, extendieron el modelo mediante la introducción del análisis de componentes principales adoptando técnicas de datos funcionales combinadas con alisado no paramétrico y métodos estadísticos robustos. Además ajustaron la evolución temporal de cada componente a una serie temporal univariante. Así, el modelo de Lee-Carter se puede considerar como un caso particular de este enfoque general.

El modelo de Cairns-Blake-Dowd (CBD)

El modelo alternativo al de Lee-Carter más difundido en la literatura actuarial es la especificación planteada por Cairns et al. (2006). Estos autores, apoyándose en el hecho

empírico de que

$$\log \left[\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} \right]$$

es aproximadamente lineal en x para valores de t fijos (excepto en las edades jóvenes) asumen que

$$\log \left[\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} \right] = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x. \quad (1.10)$$

Esto es equivalente a la siguiente expresión para la probabilidad de fallecimiento $q_x(t)$:

$$q_x(t) = \frac{\exp(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x)}{1 + \exp(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x)},$$

donde el vector $\kappa_t = (\kappa_t^{[1]}, \kappa_t^{[2]})^T$ se modeliza como una serie temporal bivalente.

De acuerdo con Pitacco et al. (2009), “al ajustarse a los datos, los cambios en el tiempo en κ_t han sido aproximadamente lineales, al menos en el pasado reciente. Esto sugiere que la dinámica del factor temporal κ_t podría ser descrita apropiadamente por un *random walk* bivalente con *drifts*”.

Esto es:

$$\begin{aligned} \kappa_t^{[1]} &= \kappa_{t-1}^{[1]} + \theta_1 + \varepsilon_t^{[1]}, \\ \kappa_t^{[2]} &= \kappa_{t-1}^{[2]} + \theta_2 + \varepsilon_t^{[2]}. \end{aligned}$$

donde θ_1 y θ_2 son los parámetros *drift* y $\varepsilon_t^{[1]}, \varepsilon_t^{[2]}$ son las perturbaciones aleatorias que se asumen normales e independientes, con media 0 y matriz de covarianzas Σ .

Esta especificación no presenta ningún problema de identificabilidad por lo que no es necesario imponer ninguna restricción como en el modelo de Lee-Carter.

En la práctica, el modelo CBD se ajusta a los datos históricos y se obtienen las estimaciones de la constante y de la pendiente en los diferentes momentos del tiempo. Éstas se utilizan luego para proyectar los valores futuros de la serie de tiempo bivalente. A partir de esta proyecciones de la constante y de la pendiente, y en combinación con el

efecto lineal de la edad, se obtienen las probabilidades de fallecimiento proyectadas.

En este modelo, a diferencia del modelo de Lee-Carter, la edad es tratada como una variable explicativa y entra en el modelo de forma lineal. La constante $k_t^{[1]}$ y la pendiente $k_t^{[2]}$ se modelizan como una serie de tiempo bivalente que rige la trayectoria de la mortalidad.

Generalmente, $k_t^{[1]}$ es decreciente conforme se avanza en el tiempo, lo cual se explica por el hecho de que las tasas de mortalidad han ido decreciendo en el tiempo para todas las edades. Por lo tanto, la gráfica del logaritmo del cociente de probabilidades en función de la edad se desplaza hacia abajo conforme se avanza el tiempo.

Si durante el periodo de ajuste las mejoras en la mortalidad han sido mayores en las edades más bajas que en las edades más avanzadas, la pendiente $k_t^{[2]}$ estaría aumentando con el tiempo. En tal caso, el gráfico del logaritmo del cociente de probabilidades en función de la edad sería cada vez más empinado conforme se desplaza hacia abajo a través del tiempo.

El modelo CBD incluye dos factores temporales $k_t^{[1]}$ y $k_t^{[2]}$ que afectan a diferentes edades de maneras distintas. Ésta es una diferencia sustancial con el modelo de Lee-Carter donde una única serie temporal induce correlación perfecta en las tasas de mortalidad de diferentes edades entre un año y el siguiente. De acuerdo con Pitacco et al. (2009), “existe evidencia empírica que sugiere que cambios en las tasas de mortalidad están imperfectamente correlacionados”, lo cual apoya al modelo CBD o bien al modelo (1.9) con $r = 2$.

Como comentario final, el modelo CBD puede ser visto como una especificación desde un enfoque intermedio entre un modelo de regresión generalizado y el modelo de Lee-Carter en el sentido de que la edad entra al modelo CBD como una variable explicativa continua, mientras que el efecto del tiempo es recogido por dos factores (constante y pendiente variables en el tiempo).

El modelo CBD con efecto cohorte (M6)

El modelo planteado por Cairns et al. (2009), al cual los propios autores bautizaron con el acrónimo *M6*, fue la primera generalización del modelo CBD para contemplar el efecto cohorte mediante la inclusión de un factor latente:

$$\log \left[\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} \right] = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x + \gamma_{t-x}. \quad (1.11)$$

La inclusión del término γ_{t-x} en el modelo original es análoga a la que Renshaw and Haberman (2006) habían hecho sobre al modelo planteado por Lee and Carter (1992).

La expresión (1.11) es equivalente a

$$q_x(t) = \frac{\exp(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x + \gamma_{t-x})}{1 + \exp(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x + \gamma_{t-x})}. \quad (1.12)$$

Este modelo también presenta problemas de identificabilidad que se resuelven mediante un cambio de variables y un conjunto de restricciones (ver Cairns et al. (2009)). Una vez determinada la solución particular que plantean los autores se obtienen los valores estimados $\hat{\kappa}_t^{[1]}$, $\hat{\kappa}_t^{[2]}$ y $\hat{\gamma}_{t-x}$.

El conjunto de variables latentes se modeliza como un *random walk* multivariante con *drifts*:

$$\begin{aligned} \kappa_t^{[1]} &= \kappa_{t-1}^{[1]} + \theta_1 + \omega_t^{[1]}, \\ \kappa_t^{[2]} &= \kappa_{t-1}^{[2]} + \theta_2 + \omega_t^{[2]}, \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1} + \theta_3 + \omega_t^{[3]}. \end{aligned}$$

Se proyectan los valores futuros de $\kappa_t^{[1]}$, $\kappa_t^{[2]}$ y γ_{t-x} , y sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (1.12) se obtienen las probabilidades de fallecimiento proyectadas. Es decir,

$$\hat{q}_x(t) = \frac{\exp(\hat{\kappa}_t^{[1]} + \hat{\kappa}_t^{[2]}x + \hat{\gamma}_{t-x})}{1 + \exp(\hat{\kappa}_t^{[1]} + \hat{\kappa}_t^{[2]}x + \hat{\gamma}_{t-x})}.$$

Otras extensiones del modelo CBD

Existe en la literatura actuarial una amplia gama de generalizaciones del modelo CBD. De manera específica, Cairns et al. (2009) plantean otra generalización del modelo CBD con efecto cohorte añadiéndole un término cuadrático que afecta al efecto edad. La inclusión de este término cuadrático fue inspirada por la identificación de cierta curvatura en la función

$$\log \left[\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} \right]$$

en los gráficos de los datos de Estados Unidos con los que trabajaron los autores.

La especificación es la siguiente:

$$\log \left[\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} \right] = k_t^{[1]} + (x - \bar{x})k_t^{[2]} + \beta_x((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2)k_t^{[3]} + \gamma_{t-x}, \quad (1.13)$$

donde \bar{x} y $\hat{\sigma}_x^2$ son la media y la varianza de variable x en el conjunto de datos y γ_{t-x} es el factor dinámico que recoge el efecto cohorte.

La expresión (1.13) es equivalente a

$$q_x(t) = \frac{\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{[3]}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}}{1 + \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{[3]}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}}. \quad (1.14)$$

Este modelo también presenta problemas de identificabilidad y, de manera similar al modelo (1.11), también se resuelven mediante un cambio de variables y un conjunto de restricciones (ver Cairns et al. (2009)). Una vez determinada la solución particular que plantean los autores se obtienen los valores estimados $\hat{\beta}_x$, $\hat{\kappa}_t^{[1]}$, $\hat{\kappa}_t^{[2]}$, $\hat{\kappa}_t^{[3]}$ y $\hat{\gamma}_{t-x}$.

El conjunto de variables latentes se modeliza como un *random walk* multivariante con

drifts:

$$\begin{aligned}\kappa_t^{[1]} &= \kappa_{t-1}^{[1]} + \theta_1 + \omega_t^{[1]}, \\ \kappa_t^{[2]} &= \kappa_{t-1}^{[2]} + \theta_2 + \omega_t^{[2]}, \\ \kappa_t^{[3]} &= \kappa_{t-1}^{[3]} + \theta_3 + \omega_t^{[3]}, \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1} + \theta_4 + \omega_t^{[4]}.\end{aligned}$$

Se proyectan los valores futuros de $\kappa_t^{[1]}$, $\kappa_t^{[2]}$, $\kappa_t^{[3]}$ y γ_{t-x} , y sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (1.14) se obtienen las probabilidades de fallecimiento proyectadas. Es decir,

$$\hat{q}_x(t) = \frac{\hat{\kappa}_t^{[1]} + \hat{\kappa}_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \hat{\kappa}_t^{[3]}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \hat{\gamma}_{t-x}}{1 + \hat{\kappa}_t^{[1]} + \hat{\kappa}_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \hat{\kappa}_t^{[3]}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \hat{\gamma}_{t-x}}.$$

Asimismo, los mismos autores, Cairns et al. (2009) propusieron otra generalización más del modelo CBD contemplando una disminución o decaimiento del efecto cohorte con el paso del tiempo:

$$\log \left[\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)} \right] = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}(x_c - x). \quad (1.15)$$

La expresión (1.15) es equivalente a

$$q_x(t) = \frac{\exp(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}(x_c - x))}{1 + \exp(\kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}(x_c - x))}. \quad (1.16)$$

En este caso sólo es necesario imponer una única restricción para resolver la indeterminación del modelo, esto es:

$$\sum_{x,t} \gamma_{t-x} = 0.$$

Una vez impuesta esta restricción se determina una solución particular y se obtienen los valores estimados $\hat{\kappa}_t^{[1]}$, $\hat{\kappa}_t^{[2]}$ y $\hat{\gamma}_{t-x}$.

El conjunto de variables latentes se modeliza como un *random walk* multivariante con *drifts*:

$$\begin{aligned}\kappa_t^{[1]} &= \kappa_{t-1}^{[1]} + \theta_1 + \omega_t^{[1]}, \\ \kappa_t^{[2]} &= \kappa_{t-1}^{[2]} + \theta_2 + \omega_t^{[2]}, \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1} + \theta_3 + \omega_t^{[3]}.\end{aligned}$$

Se proyectan los valores futuros de $\kappa_t^{[1]}$, $\kappa_t^{[2]}$, y γ_{t-x} , y sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (1.16) se obtienen las probabilidades de fallecimiento proyectadas. Es decir,

$$\hat{q}_x(t) = \frac{\exp(\hat{\kappa}_t^{[1]} + \hat{\kappa}_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \hat{\gamma}_{t-x}(x_c - x))}{1 + \exp(\hat{\kappa}_t^{[1]} + \hat{\kappa}_t^{[2]}(x - \bar{x}) + \hat{\gamma}_{t-x}(x_c - x))}.$$

Modelos basados en *splines*

Los modelos estocásticos de mortalidad presentados se basan en el uso de series temporales latentes para hacer proyecciones de mortalidad. Por su parte, Currie et al. (2004) propusieron el uso de *B-splines* (basic splines) y *P-splines* (penalized splines) para ajustar las superficies de mortalidad y hacer proyecciones. Así,

$$\log [m_x(t)] = \sum_{i,j} \theta_{i,j} B_{i,j}^{ay}(x, t),$$

con suavizado de los parámetros $\theta_{i,j}$ en las direcciones de la edad y la cohorte.

Luego, Currie (2006) propuso el siguiente modelo *edad-período-cohorte* (*age-period-cohort model*)

$$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \kappa_t + \gamma_{t-x},$$

el cual es un caso particular del modelo RH donde $\beta_x^{[1]} = 1$ y $\beta_x^{[2]} = 1$. Este autor trabaja con P-splines para ajustar los parámetros α_x , κ_t y γ_{t-x} y así obtener funciones suavizadas.

Esta metodología ha sido aplicada recientemente a datos de mortalidad española (ver Albarrán-Lozano et al. (2015)).

1.4 Datos, metodologías y estructura de la Tesis

La fuente de datos utilizada en esta Tesis es *Human Mortality Database* (disponible en <http://www.mortality.org/>). Esta base de datos fue creada en el año 2000 como una iniciativa conjunta del Departamento de Demografía de la Universidad de California, Berkeley (Estados Unidos) y el Instituto Max Planck de Investigación Demográfica en Rostock (Alemania) y fue lanzada en mayo de 2002. La base contiene datos de mortalidad por sexo, edad y cohorte, y el parámetro ω está fijado en 110. Actualmente contiene tablas de mortalidad de 38 países.

Es importante señalar que pueden existir diferencias en el patrón de mortalidad entre la población general y la población asegurada. Estas diferencias se deben a lo que en seguros se conoce como *antiselección* o *selección adversa*. Este concepto tiene que ver con el hecho de que quien contrata un seguro voluntariamente lo hace porque tiene una necesidad particular que está relacionada con su mortalidad o supervivencia esperada. Si bien la antiselección está más presente en los seguros de vida, en el caso de las coberturas por supervivencia también puede existir. Así, el perfil de mortalidad de quien decide comprar una renta vitalicia de manera voluntaria puede no ser el mismo que el de alguien que ha sido incluido de manera obligatoria en un plan de pensiones (por ejemplo, como consecuencia de trabajar en una empresa que lo otorga como beneficio) o el de alguien que se jubila en un sistema público de pensiones. Generalmente, las rentas vitalicias voluntarias suelen ser adquiridas por personas que gozan de buena salud y consideran que tienen una esperanza de vida alta, mientras que es poco probable que individuos con baja esperanza de vida adquieran una cobertura de este tipo. Esta es la razón por la que quienes adquieren productos voluntariamente en compañías de seguros (es decir, los que conforman la población asegurada) suelen tener un perfil de mortalidad diferente del de la población general.

No obstante, existe una gran dificultad para disponer de datos de población asegurada.

Por un lado, las compañías de seguros suelen ser reacias a compartirlos escudándose en las leyes de protección de datos. En particular, en España, está la Ley Orgánica 15/1999 de 13 de diciembre de Protección de Datos de Carácter Personal (LOPD) (fundamentada en el artículo 18 de la Constitución Española de 1978, sobre el derecho a la intimidad familiar y personal y el secreto de las comunicaciones), cuyo principal objetivo es regular el tratamiento de los datos y archivos de carácter personal, los derechos de los ciudadanos sobre ellos y las obligaciones de aquéllos que los crean o tratan. Por otro lado, es necesario que el tamaño de la cartera de las compañías de seguros (o agregación de carteras) sea lo suficientemente grande. Esto está relacionado con la convergencia en probabilidad de las tasas de mortalidad observadas a las verdaderas tasas de mortalidad de asegurados. Y en la medida en que el tamaño de la cartera no sea lo suficientemente grande, las inferencias carecerán de validez.

Por todo lo anteriormente expuesto, en los ejemplos de aplicación de las metodologías propuestas se ha trabajado con datos de población general. No obstante, las metodologías se proponen también para ser utilizadas por compañías de seguros trabajando con datos propios de población asegurada.

El resto de la Tesis se estructura de la siguiente manera. En el capítulo 2 se propone realizar proyecciones de mortalidad por medio de modelos jerárquicos. En particular, se ha trabajado con el modelo de Lee-Carter para proyectar mortalidad simultáneamente en un conjunto de países relacionados y con características demográficas similares. Se ha usado el enfoque bayesiano y también se ha obtenido una solución clásica por medio de la metodología de *data cloning* que permite obtener aproximaciones de los estimadores de máxima verosimilitud. La utilización de una estructura jerárquica ha permitido proyectar la mejora de la mortalidad de cada país no sólo teniendo en cuenta su propia historia, sino también aprovechando la de países semejantes.

En el capítulo 3 se propone realizar proyecciones de mortalidad por medio de ensambles de modelos. En particular, se ha trabajado con los modelos LC, RH, CBD y M6. Se han

usado especificaciones clásicas y ensambles por medio de una técnica basada en el criterio de información de Akaike, y también se han planteado las correspondientes especificaciones bayesianas de los modelos y un ensamble utilizando *Bayesian Model Averaging* (*BMA*). La utilización de estas técnicas ha permitido obtener proyecciones de la mejora de la mortalidad con menor sesgo y más precisión que las que se obtienen tomando cada modelo por separado.

En el capítulo 4 se expone un análisis actuarial del riesgo de longevidad para diferentes casos. Mediante las valoraciones pertinentes se analiza el impacto que la no advertencia de la mejora en la mortalidad puede tener en diferentes casos, como una renta vitalicia individual (como podría ser el beneficio de un plan de pensiones), una renta vitalicia extensiva a un tercero (como podría ser una jubilación con derecho a pensión para el cónyuge en caso de fallecimiento del titular), y una renta vitalicia sobre dos personas (como podría ser el caso de una hipoteca inversa sobre una propiedad compartida).

Por último, en el capítulo 5, se presentan las conclusiones, consideraciones finales y se proponen futuras líneas de investigación.

Capítulo 2

Proyección de la Mortalidad utilizando Modelos Jerárquicos

2.1 Introducción

Dentro de las metodologías estadísticas que se pueden aplicar en el campo actuarial, es posible distinguir entre dos enfoques diferentes: el clásico o frecuentista y el bayesiano. El enfoque clásico utiliza únicamente la información muestral, en tanto que el enfoque bayesiano incorpora otras fuentes de información relevante, como pueden ser ciertos conocimientos previos u opiniones de expertos.

En cuanto a proyección de mortalidad, los modelos presentados en el capítulo 1 se encuadran en origen dentro del enfoque clásico. También existen propuestas de proyección de mortalidad basadas en juicios de expertos, tales como Lutz et al. (1998), Lutz et al. (2004) y Lutz et al. (2008). Sin embargo, estos métodos no se basan en datos disponibles sino en un conjunto de informes de expertos y su capacidad para especificar cotas de probabilidad, que no siempre son lo suficientemente precisos (Alho and Spencer (2006)). Por otro lado, los modelos econométricos clásicos son en general los métodos estadísticos

más empleados para analizar y hacer proyecciones de tasas de mortalidad. Los modelos lineales generalizados (GLM) se pueden usar asumiendo que la edad, la cohorte y el periodo son variables explicativas. Sin embargo, las técnicas de estimación por máxima verosimilitud son difíciles de aplicar cuando se plantean modelos complejos.

Con respecto al enfoque bayesiano, Girosi and King (2008), Czado et al. (2005), Li et al. (2014), Pedroza (2006) y Gerland et al. (2014) mostraron aplicaciones relevantes usando esta metodología. En particular, Pedroza (2006) propuso una especificación bayesiana del modelo de Lee-Carter para la estimación de los parámetros relativos a la edad y al índice temporal. Por otro lado, Dellaportas et al. (2011) plantearon una versión bayesiana del modelo de Heligman and Pollard (1980) para proyectar tasas de mortalidad.

Los modelos jerárquicos, que habitualmente se tratan mediante metodologías bayesianas, se suelen utilizar en problemas multiparamétricos cuando la información sobre las observaciones está disponible según diferentes niveles (véase para una revisión Gelman et al. (2014)). Pero, recientemente, se ha desarrollado una técnica conocida como *data cloning* que permite obtener estimaciones de máxima verosimilitud en modelos jerárquicos. Es decir, esta técnica emplea un enfoque clásico o frecuentista. La técnica hace uso de algoritmos basados en simulación de Monte Carlo mediante cadenas de Markov (*Monte Carlo Markov Chains, MCMC*), pero las utiliza sólo como un instrumento para obtener estimaciones de máxima verosimilitud. En contraste con el enfoque bayesiano, los resultados obtenidos por medio de *data cloning* son invariantes a la elección de las distribuciones a priori cuando el número de clones aumenta.

Lele et al. (2007) presentaron esta metodología en modelos complejos en el campo de la ecología, también se ha extendido a otras áreas como el campo de las finanzas (ver Marín et al. (2015)) y, en esta Tesis se plantea su aplicación por primera vez en el campo actuarial.

El algoritmo de *data cloning* se basa en origen en métodos de *simulated annealing* (Brooks and Morgan (1995)) y, aunque es computacionalmente intensivo, es de fácil im-

plementación utilizando el paquete `dclone` (Sólymos (2009)) de R (R Core Team (2015)).

En este capítulo se proponen dos tipos de modelos para grupos de países que están vinculados en cuanto a sus características socio-demográficas en general y mortalidad en particular. Así, se propone una especificación del modelo de Lee-Carter (Lee and Carter (1992)) de manera global para un grupo de países donde se asume que los correspondientes parámetros están vinculados entre sí a través de una estructura jerárquica.

En primer lugar, se considera el enfoque bayesiano, el cual es el enfoque habitualmente empleado en modelos jerárquicos, por medio de un algoritmo MCMC de tipo hamiltoniano (ver Neal (2011)). En la especificación bayesiana se proponen distribuciones a priori para los parámetros correspondientes de cada población, que están relacionados en una segunda jerarquía de distribuciones a priori mediante un conjunto de hiperparámetros. Luego, mediante la aplicación del teorema de Bayes, se incluye la información muestral y se obtienen las correspondientes distribuciones a posteriori.

En segundo lugar, se trabaja con el mismo modelo jerárquico pero con el objetivo de obtener estimaciones de máxima verosimilitud por medio de la metodología *data cloning*. Así, se calculan estimaciones máximo verosímiles aproximadas de los parámetros del modelo jerárquico y los correspondientes intervalos de confianza.

Una vez validada la capacidad proyectiva, tanto de la especificación bayesiana como de la clásica, se hacen proyecciones a largo plazo de las tasas de mortalidad para un conjunto de datos extraídos de la *Human Mortality Database*.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2.2 se describen los datos que se utilizan en las Secciones siguientes.

En la Sección 2.3 se propone una especificación bayesiana jerárquica del modelo de Lee-Carter, sus fundamentos y principales ideas y se presenta su aplicación a datos reales de la *Human Mortality Database*.

Posteriormente, en la Sección 2.4 se presenta la metodología *data cloning* y se aplica al modelo jerárquico de Lee-Carter propuesto en la Sección 2.3 al mismo conjunto de datos reales.

Finalmente, en la Sección 2.5 se resumen las conclusiones y consideraciones finales sobre los modelos jerárquicos aplicados al modelo de Lee-Carter.

2.2 Descripción de los datos utilizados

Tanto el modelo jerárquico bayesiano como el clásico por medio de *data cloning* que se proponen han sido aplicados a un conjunto de datos de mortalidad en países europeos vinculados entre sí. En particular, se ha trabajado con las tasas centrales de mortalidad de Francia, Italia, Portugal y España que se encuentran en la *Human Mortality Database*. La elección de los países se debe a que estos presentan niveles de desarrollo y estados de bienestar similares y, a la vez, muestran valores muy parecidos en los índices demográficos más utilizados, tales como:

- *Esperanza de vida al nacer* (e_0): tiempo que se espera que viva un recién nacido, de acuerdo con las condiciones de mortalidad del año de su nacimiento (su cálculo ha sido presentado en la Sección 1.2).
- *Esperanza de vida a la edad 65* (e_{65}): tiempo que se espera que viva una persona de 65 años de acuerdo con las condiciones de mortalidad del año en que alcanza tal edad (su cálculo fue presentado en la Sección 1.2).
- *Edad mediana de la población* (M): mediana de la variable “edad de la población con vida en un momento determinado”. Este índice es utilizado como una medida del envejecimiento de la población como resultado de las bajas tasas de nacimiento y mortalidad. Está afectado por los flujos migratorios.
- *Ratio de dependencia* (RD): cociente entre el número de personas con 65 o más años de edad y el número de personas con edades comprendidas entre los 16 y 64 años. Es decir, proporción entre la población jubilada y la población económicamente activa. El RD es utilizado como una medida de la presión que ejerce la población de la tercera edad sobre la población considerada económicamente productiva.

Los valores de estos índices demográficos correspondientes a los cuatro países en consideración para los años 2012-2013 se exponen en la tabla 2.1.

	e_0		e_{65}		M		RD
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	General
Francia	78,7	85,4	19,1	23,4	38,2	41,2	27,5
Italia	79,8	84,8	18,5	22,1	43,0	45,6	32,7
Portugal	77,3	83,6	17,6	21,3	37,6	41,9	29,4
España	79,5	85,8	18,7	22,8	40,1	42,9	26,3

Fuente: Eurostat 2012, 2013.

Tabla 2.1: Índices demográficos

En lo que a intervalo de tiempo de refiere, se ha decidido trabajar con datos de los años calendario que van desde 1960 hasta 2009, ambos límites incluidos. La determinación del límite inferior del intervalo ha tenido que ver, por un lado, con que la mejora en la mortalidad se tornó más significativa durante la segunda mitad del siglo XX y, por otro, con la decisión de fijarlo en un año no muy próximo a la finalización de la Segunda Guerra Mundial lo cual podría introducir cierto sesgo en las proyecciones.

En cuanto a las edades, se ha trabajado con aquéllas comprendidas entre los 60 y 100 años, ambos límites incluidos. Una vez más, el motivo ha tenido que ver el objetivo primario de ajustar modelos que capten la mejora en la mortalidad en las edades avanzadas, que son las que están presentando los mayores desafíos a los sistemas de Seguridad Social públicos y planes de pensiones privados. Si bien la *Human Mortality Database* cuenta con datos hasta los 110 años, teniendo en consideración los pequeños tamaños muestrales existentes para edades superiores, el límite superior ha sido determinado en 100.

Por otra parte, la base de datos ha sido subdividida en dos conjuntos: una muestra de entrenamiento y otra de validación. La primera muestra está conformada por las tasas centrales de mortalidad de los años $t = 1960, \dots, 1999$ y se ha utilizado para calibrar el modelo y obtener proyecciones. La segunda, por las tasas de los años $t = 2000, \dots, 2009$. De este modo, se pretende cotejar las proyecciones resultantes de la muestra de entrenamiento con los datos reales de la muestra de validación.

2.3 Enfoque bayesiano

2.3.1 Especificación del modelo

El modelo de Lee-Carter presentado en (1.7) está especificado sobre la tasa central de mortalidad $m_x(t)$, correspondiente a la edad x en el año t , de la siguiente manera:

$$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t},$$

Este modelo fue analizado desde el punto de vista bayesiano en el caso de una población por Pedroza (2006), quien trabajó con datos de mortalidad de los Estados Unidos.

En esta Tesis se propone una especificación bayesiana jerárquica de un modelo de Lee-Carter global para un conjunto de países relacionados. Específicamente, consideramos varias poblaciones europeas que tienen características socio-económicas comunes, de modo que los parámetros de los modelos de Lee-Carter deben estar relacionados entre sí, lo que permite modelizar su dependencia mediante una distribución de probabilidad conjunta.

De manera general se asume que se cuenta con datos correspondientes a $j = 1, \dots, J$ países. Sea entonces $m_x^{(j)}(t)$ la tasa central de mortalidad correspondiente a la edad x en el año calendario t y en la población j . De esta manera el correspondiente modelo LC que se plantea es:

$$\begin{aligned} \log [m_x^{(j)}(t)] &= \alpha_x^{(j)} + \beta_x^{(j)} \kappa_t + \varepsilon_{x,t}^{(j)}, \\ \kappa_t &= \kappa_{t-1} + \theta + \omega_t. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x,t}^{(j)} &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^{2(j)}), \\ \omega_t &\sim N(0, \sigma_\omega^2).\end{aligned}$$

Así, se asume que si bien cada país tiene su propia idiosincrasia (recogida por el conjunto propio de parámetros de cada uno de ellos), a su vez, comparten la estructura de mejora de la mortalidad (recogida por la variable latente).

El objetivo es obtener estimaciones de los parámetros $\alpha_x^{(j)}$, $\beta_x^{(j)}$ y θ y calcular las distribuciones predictivas de las tasas centrales de mortalidad correspondientes a cada edad, generación y país.

En este contexto bayesiano, se asumen las siguientes distribuciones a priori conjugadas para los parámetros (para $j = 1, \dots, J$) del primer nivel de la estructura jerárquica:

$$\begin{aligned}\alpha_x^{(j)} &\sim N(\mu_x^{(j)}, \sigma_x^{2(j)}) \\ \beta_x^{(j)} &\sim \text{Dirichlet}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) \\ \sigma_\varepsilon^{2(j)} &\sim \text{InvGamma}(g_1, g_2) \\ \kappa_1 &\sim N(\theta, \sigma_\omega^2).\end{aligned}$$

La elección de la distribución de Dirichlet para $\beta_x^{(j)}$ se hace para satisfacer la restricción $\sum_x \beta_x = 1$ y la de las distribuciones gamma inversa para las varianzas, por ser distribuciones conjugadas de la distribución normal.

En la práctica, para asumir distribuciones vagamente informativas, los parámetros de la distribución de Dirichlet se toman $\pi_j = 1$, para $j = 1, \dots, p$. A su vez, para evitar problemas de identificabilidad se impone la restricción $\sum_t \kappa_t = 0$.

En cuanto al segundo nivel de la estructura jerárquica, se asumen distribuciones vagamente informativas para todos los hiperparámetros, donde g_i (para $i = 1, \dots, 10$), σ_0^2 y

σ_1^2 toman valores positivos fijos, y μ_0 tiene un valor real, en general cercano a 0.

$$\begin{aligned}
\mu_x^{(j)} &\sim N(\mu_0, \sigma_0^2) \\
\sigma_x^{2(j)} &\sim \text{InvGamma}(g_3, g_4) \\
\theta &\sim N(0, \sigma_1^2) \\
\sigma_\omega^2 &\sim \text{InvGamma}(g_5, g_6) \\
\gamma_1 &\sim \text{Gamma}(g_7, g_8) \\
\gamma_2 &\sim \text{Gamma}(g_9, g_{10}).
\end{aligned}$$

Bajo el supuesto de normalidad, la función de verosimilitud del modelo resulta:

$$\begin{aligned}
L(m_x(t), \kappa_t; \Theta) &= \prod_{j=1}^J \prod_{t=1}^n \prod_{x=x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon^{(j)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log m_x^{(j)}(t) - \alpha_x^{(j)} - \beta_x^{(j)} \kappa_t}{\sigma_\varepsilon^{(j)}} \right)^2 \right] \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_t - t\theta}{\sqrt{t}\sigma_\omega} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

donde Θ representa el conjunto de parámetros para los países $j = 1, \dots, J$ y edades $x = x_{min}, \dots, x_{max}$.

La distribución conjunta a posteriori de los parámetros se obtiene al multiplicar la función de verosimilitud por las correspondientes distribuciones a priori. Así, la distribución a posteriori resulta:

$$\begin{aligned}
\pi(\Theta|m_x(t), \kappa_t) &= \prod_{j=1}^J \prod_{t=1}^n \prod_{x=x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon^{(j)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log m_x^{(j)}(t) - \alpha_x^{(j)} + \beta_x^{(j)} \kappa_t}{\sigma_\varepsilon^{(j)}} \right)^2 \right] \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_t - t\theta}{\sqrt{t}\sigma_\omega} \right)^2 \right] \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^{(j)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_x^{(j)} - \mu_x^{(j)}}{\sigma_x^{(j)}} \right)^2 \right] \\
&\times \frac{\Gamma \left(\prod_{j=1}^p \Gamma(\pi_j) \right)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(\pi_j)} \prod_{j=1}^p (\beta_x^{(j)})^{\pi_j-1} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\sigma_1} \right)^2 \right] \\
&\times \frac{g_6^{g_5}}{\Gamma(g_5)} (\sigma_\omega^2)^{-g_5-1} \exp \left[-\frac{g_6}{\sigma_\omega^2} \right] \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_x^{(j)} - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 \right] \\
&\times \frac{g_4^{g_3}}{\Gamma(g_3)} (\sigma_x^{(j)2})^{-g_3-1} \exp \left[-\frac{g_4}{\sigma_x^{(j)2}} \right] \\
&\times \frac{g_2^{g_1}}{\Gamma(g_1)} (\sigma_\varepsilon^{(j)2})^{-g_1-1} \exp \left[-\frac{g_2}{\sigma_\varepsilon^{(j)2}} \right] \\
&\times \frac{g_8^{g_7}}{\Gamma(g_7)} \gamma_1^{-g_7-1} \exp \left[-\frac{g_8}{\gamma_1} \right] \\
&\times \frac{g_{10}^{g_9}}{\Gamma(g_9)} \gamma_2^{-g_9-1} \exp \left[-\frac{g_{10}}{\gamma_2} \right].
\end{aligned}$$

Puesto que el cálculo de la distribución a posteriori no tiene una solución analítica, es necesario recurrir a un algoritmo MCMC para simular observaciones de la distribución a posteriori. Puesto que las distribuciones condicionadas no son estándar, se puede usar un *Gibbs sampling* (*muestreo de Gibbs*) con un algoritmo *Metropolis-Hastings*. Dichas distribuciones son obtenidas fácilmente a partir de la distribución conjunta a posteriori de los parámetros tomando en cada caso el correspondiente término proporcional para

cada uno de los parámetros.

En esta Tesis dicho problema se ha abordado con un algoritmo MCMC *hamiltoniano* (*Hamiltonian Monte Carlo, HMC*) que permite obtener aproximaciones de las distribuciones a posteriori de los parámetros e hiperparámetros de forma más eficiente. El algoritmo ha sido programado en Stan (Carpenter et al. (2015)) haciendo uso del paquete **rstan** en R (R Core Team (2015)), que tiene la ventaja de que no es necesario programar las distribuciones condicionadas de todos los parámetros.

2.3.2 Aplicación del modelo jerárquico bayesiano

Se ha escrito un programa en Stan, haciendo uso del paquete **rstan** del R project (R Core Team (2015)).

En la tabla 2.2 se muestran los valores de las medias a posteriori de los parámetros $\alpha_x^{(j)}$ y $\beta_x^{(j)}$ para las edades $x = 60, \dots, 100$ para los cuatro países considerados.

En la tabla 2.3, se exponen los valores de las medias a posteriori del factor de mortalidad κ_t , para los años que constituyen la muestra de entrenamiento, es decir, $t = 1960, \dots, 1999$.

Y en la tabla 2.4 se muestran los valores de las medias predictivas a posteriori del factor κ_t para los años de la muestra de validación, es decir, $t = 2000, \dots, 2009$.

	Francia		Italia		Portugal		España	
x	α_x	β_x	α_x	β_x	α_x	β_x	α_x	β_x
60	-4,0243	0,03	-4,113	0,0351	-4,0397	0,029	-4,2044	0,03
61	-3,9446	0,0303	-4,0152	0,034	-3,9735	0,026	-4,1505	0,0256
62	-3,8651	0,0316	-3,9236	0,0337	-3,8695	0,0301	-4,026	0,033
63	-3,7819	0,0311	-3,8382	0,0335	-3,7714	0,0293	-3,9418	0,0309
64	-3,7058	0,0317	-3,7427	0,0317	-3,6946	0,0299	-3,8408	0,032
65	-3,6258	0,0326	-3,6501	0,0316	-3,5988	0,029	-3,7456	0,033
66	-3,5493	0,0334	-3,562	0,0307	-3,5148	0,0291	-3,6686	0,0306
67	-3,4664	0,0332	-3,4691	0,0296	-3,4115	0,0292	-3,5647	0,0318
68	-3,3808	0,0334	-3,3842	0,0292	-3,3091	0,0307	-3,4674	0,0331
69	-3,3033	0,0337	-3,2908	0,0291	-3,2202	0,0289	-3,3897	0,0302
70	-3,2115	0,0338	-3,2009	0,0297	-3,0961	0,0329	-3,2687	0,0341
71	-3,1285	0,0339	-3,1138	0,0277	-3,0272	0,0293	-3,2097	0,0283
72	-3,0429	0,033	-3,015	0,0287	-2,9106	0,0321	-3,062	0,0362
73	-2,9529	0,0336	-2,9273	0,0282	-2,8121	0,0308	-2,9793	0,0327
74	-2,8634	0,0337	-2,8336	0,0279	-2,7064	0,0312	-2,8731	0,0334
75	-2,7693	0,0337	-2,7415	0,0276	-2,6037	0,0314	-2,7857	0,0324
76	-2,6772	0,0332	-2,6491	0,0269	-2,5001	0,0301	-2,6853	0,0321
77	-2,5813	0,0325	-2,5554	0,0269	-2,3999	0,0301	-2,5922	0,0296
78	-2,4839	0,0314	-2,4593	0,0265	-2,2868	0,0305	-2,4749	0,0337
79	-2,3883	0,0315	-2,3624	0,0252	-2,1942	0,0285	-2,4015	0,0278
80	-2,2887	0,0295	-2,2564	0,027	-2,149	0,0266	-2,2903	0,0305
81	-2,1882	0,0276	-2,165	0,0257	-2,069	0,0248	-2,2265	0,0239
82	-2,0887	0,027	-2,0725	0,0254	-1,9654	0,0268	-2,0936	0,0295
83	-1,9929	0,025	-1,9723	0,0245	-1,8663	0,0242	-2,0226	0,0261
84	-1,8961	0,0236	-1,883	0,0238	-1,7777	0,0247	-1,902	0,0289
85	-1,8039	0,023	-1,7899	0,023	-1,6859	0,0246	-1,8352	0,0249
86	-1,7042	0,0223	-1,6997	0,0221	-1,6019	0,0225	-1,7364	0,0244
87	-1,6184	0,0206	-1,6064	0,0216	-1,5102	0,0209	-1,6502	0,0221
88	-1,5273	0,0186	-1,5184	0,0207	-1,4208	0,0213	-1,5535	0,0232
89	-1,4402	0,0178	-1,4314	0,0208	-1,3401	0,0219	-1,4802	0,019
90	-1,351	0,0167	-1,3412	0,0202	-1,2645	0,0192	-1,3899	0,0191
91	-1,2581	0,0163	-1,2656	0,0189	-1,2023	0,018	-1,3745	0,0077
92	-1,1878	0,0142	-1,1759	0,0187	-1,1046	0,0151	-1,2521	0,0135
93	-1,1086	0,0117	-1,1062	0,0166	-1,0469	0,017	-1,2014	0,0115
94	-1,0318	0,0097	-1,0279	0,017	-0,984	0,0174	-1,1029	0,0122
95	-0,9667	0,0102	-0,9677	0,0154	-0,9083	0,015	-1,0368	0,0114
96	-0,8982	0,0091	-0,9003	0,0146	-0,8447	0,0141	-0,9698	0,0103
97	-0,8328	0,008	-0,8359	0,0138	-0,784	0,0133	-0,9054	0,0092
98	-0,7705	0,0069	-0,7746	0,013	-0,7262	0,0125	-0,8437	0,0082
99	-0,7114	0,0059	-0,7163	0,0122	-0,6713	0,0117	-0,7847	0,0073
100	-0,6555	0,0049	-0,6611	0,0114	-0,6195	0,0109	-0,7286	0,0064

Tabla 2.2: Medias a posteriori de los parámetros $\alpha_x^{(j)}$ y $\beta_x^{(j)}$.

Parámetro	Media a posteriori
κ_{1960}	6,762
κ_{1961}	4,9377
κ_{1962}	7,1758
κ_{1963}	7,6994
κ_{1964}	5,4092
κ_{1965}	6,1005
κ_{1966}	5,4683
κ_{1967}	5,4655
κ_{1968}	5,846
κ_{1969}	7,2817
κ_{1970}	4,4793
κ_{1971}	5,849
κ_{1972}	3,73
κ_{1973}	4,7309
κ_{1974}	4,1979
κ_{1975}	4,2131
κ_{1976}	3,952
κ_{1977}	2,4971
κ_{1978}	2,0325
κ_{1979}	0,6768
κ_{1980}	0,4847
κ_{1981}	0,0844
κ_{1982}	-1,5334
κ_{1983}	-0,5528
κ_{1984}	-1,8419
κ_{1985}	-1,5208
κ_{1986}	-2,7738
κ_{1987}	-4,1155
κ_{1988}	-4,3966
κ_{1989}	-5,2197
κ_{1990}	-5,0778
κ_{1991}	-5,577
κ_{1992}	-6,8392
κ_{1993}	-6,6319
κ_{1994}	-8,0758
κ_{1995}	-8,1524
κ_{1996}	-8,4566
κ_{1997}	-9,2829
κ_{1998}	-9,3127
κ_{1999}	-9,7131

Tabla 2.3: Medias a posteriori del índice de mortalidad κ_t histórico.

Parámetro	Media predictiva a posteriori
κ_{2000}	-10,033
κ_{2001}	-10,3667
κ_{2002}	-10,6835
κ_{2003}	-11,0144
κ_{2004}	-11,3508
κ_{2005}	-11,6878
κ_{2006}	-12,0319
κ_{2007}	-12,3637
κ_{2008}	-12,6942
κ_{2009}	-13,0219

Tabla 2.4: Medias a posteriori del índice de mortalidad κ_t proyectado.

La capacidad proyectiva del modelo ha sido evaluada mediante los correspondientes intervalos de predicción al 95% de probabilidad de las tasas centrales de mortalidad y se ha cotejado con los valores observados en la muestra de validación. En las Tablas 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8 se exponen los resultados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 en los diez años de la muestra de validación para Francia, Italia, Portugal y España, respectivamente.

Por su parte, para una visualización gráfica, en las Figuras 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 están representadas las bandas de predicción al 95% de probabilidad y las trayectorias de mortalidad observadas para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 para Francia, Italia, Portugal y España, respectivamente. Como se puede apreciar, las bandas de predicción generadas a partir de la muestra de entrenamiento contienen a las trayectorias de mortalidad observadas en la muestra de validación en la mayoría de los casos.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0118	0,0148	0,0119	0,0253	0,0325	0,0273	0,0671	0,0846	0,0757
2001	0,0114	0,0151	0,011	0,0243	0,033	0,0262	0,0647	0,0857	0,0705
2002	0,0110	0,0152	0,0115	0,0234	0,0335	0,0262	0,0628	0,0867	0,0704
2003	0,0107	0,0154	0,0116	0,0226	0,0339	0,0250	0,0611	0,0875	0,0705
2004	0,0104	0,0155	0,0109	0,0219	0,0341	0,0236	0,0593	0,0882	0,0642
2005	0,0100	0,0156	0,0109	0,0211	0,0344	0,0227	0,0575	0,0887	0,0634
2006	0,0098	0,0157	0,0107	0,0205	0,0346	0,0219	0,0560	0,0894	0,0613
2007	0,0095	0,0158	0,0107	0,0198	0,0349	0,0214	0,0544	0,0898	0,0598
2008	0,0093	0,0159	0,0104	0,0193	0,0352	0,0206	0,0532	0,0902	0,0588
2009	0,0090	0,0160	0,0106	0,0188	0,0354	0,0202	0,0518	0,0908	0,0561

	x=90			x=100		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,199	0,2403	0,2127	0,4535	0,5377	0,4855
2001	0,1956	0,2415	0,2097	0,4525	0,5373	0,4798
2002	0,1931	0,2430	0,2074	0,4511	0,5375	0,4835
2003	0,1901	0,2434	0,2166	0,4492	0,5363	0,5012
2004	0,1873	0,2440	0,1921	0,4482	0,5366	0,4566
2005	0,1843	0,2445	0,2121	0,4469	0,5362	0,4719
2006	0,1817	0,2449	0,1697	0,4456	0,5356	0,4552
2007	0,1793	0,2459	0,1889	0,4438	0,5363	0,4583
2008	0,1769	0,2463	0,1873	0,4427	0,5357	0,4588
2009	0,1744	0,2468	0,1686	0,4409	0,5352	0,4613

Tabla 2.5: Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Francia.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,01	0,0132	0,0094	0,0265	0,0343	0,0274	0,0706	0,0903	0,0823
2001	0,0096	0,0134	0,0097	0,0257	0,0347	0,0266	0,0685	0,0911	0,0702
2002	0,0093	0,0136	0,0090	0,0249	0,0351	0,0251	0,0667	0,0918	0,0734
2003	0,0089	0,0137	0,0096	0,0243	0,0353	0,0244	0,0650	0,0924	0,0749
2004	0,0086	0,0138	0,0091	0,0236	0,0356	0,0235	0,0633	0,0929	0,0681
2005	0,0083	0,0139	0,0085	0,0229	0,0358	0,0228	0,0617	0,0933	0,0689
2006	0,0081	0,0141	0,0083	0,0222	0,0359	0,0213	0,0602	0,0938	0,0656
2007	0,0078	0,0142	0,0084	0,0216	0,0363	0,0206	0,0588	0,0946	0,0660
2008	0,0076	0,0143	0,008	0,0212	0,0364	0,0208	0,0574	0,0948	0,0653
2009	0,0074	0,0143	0,0076	0,0206	0,0366	0,0195	0,0563	0,0952	0,0611

	x=90			x=100		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,1904	0,2386	0,2038	0,4159	0,51	0,4759
2001	0,1870	0,2396	0,2106	0,4119	0,5106	0,4736
2002	0,1834	0,2408	0,2028	0,4086	0,5108	0,4674
2003	0,1800	0,2419	0,2162	0,4054	0,5096	0,4914
2004	0,1770	0,2425	0,1929	0,4015	0,5104	0,4442
2005	0,1738	0,2431	0,1981	0,3979	0,5111	0,4653
2006	0,1704	0,2437	0,1907	0,3944	0,5117	0,4479
2007	0,1677	0,2449	0,1878	0,3914	0,5120	0,4558
2008	0,1652	0,2455	0,1887	0,3877	0,5120	0,4622
2009	0,1623	0,2461	0,1698	0,3844	0,5119	0,4611

Tabla 2.6: Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Italia.

t	x=60			x=70			x=80		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0115	0,015	0,0123	0,0283	0,0373	0,0318	0,0785	0,1011	0,0892
2001	0,0111	0,0151	0,0122	0,0272	0,0378	0,0304	0,0763	0,1024	0,0829
2002	0,0108	0,0153	0,0111	0,0263	0,0383	0,0297	0,0744	0,1030	0,0850
2003	0,0105	0,0154	0,0116	0,0255	0,0386	0,0304	0,0725	0,1039	0,0821
2004	0,0103	0,0155	0,0109	0,0247	0,0389	0,0273	0,0705	0,1041	0,0799
2005	0,0100	0,0155	0,0112	0,0239	0,0391	0,0267	0,0690	0,1047	0,0808
2006	0,0097	0,0157	0,0112	0,0232	0,0395	0,0250	0,0672	0,1051	0,0756
2007	0,0095	0,0158	0,0114	0,0225	0,0397	0,0242	0,0657	0,1057	0,0771
2008	0,0092	0,0158	0,0107	0,0220	0,0398	0,0240	0,0643	0,1060	0,0763
2009	0,0090	0,0159	0,0104	0,0213	0,0402	0,0241	0,0629	0,1065	0,0739

t	x=90			x=100		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,2069	0,2618	0,2359	0,4321	0,5374	0,5088
2001	0,2033	0,2632	0,2310	0,4290	0,5376	0,5082
2002	0,1995	0,2637	0,2259	0,4252	0,5385	0,5094
2003	0,1968	0,2649	0,2416	0,4228	0,5374	0,5147
2004	0,1933	0,2653	0,2030	0,4191	0,5372	0,4666
2005	0,1903	0,2660	0,2383	0,4155	0,5370	0,5130
2006	0,1868	0,2666	0,2052	0,4113	0,5378	0,4765
2007	0,1840	0,2672	0,2163	0,4081	0,5378	0,4685
2008	0,1812	0,2678	0,2243	0,4058	0,5378	0,4663
2009	0,1784	0,2685	0,1890	0,4016	0,5391	0,4611

Tabla 2.7: Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Portugal.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0099	0,0123	0,0107	0,0239	0,0304	0,0266	0,0665	0,0833	0,0775
2001	0,0095	0,0125	0,0105	0,0229	0,0311	0,0269	0,0641	0,0847	0,0716
2002	0,0092	0,0127	0,0105	0,0221	0,0314	0,0253	0,0619	0,0858	0,0722
2003	0,0090	0,0128	0,0107	0,0213	0,0319	0,0255	0,0601	0,0866	0,0729
2004	0,0087	0,0129	0,0100	0,0206	0,0321	0,0240	0,0583	0,0871	0,0701
2005	0,0084	0,0130	0,0102	0,0199	0,0324	0,0235	0,0566	0,0877	0,0734
2006	0,0082	0,0131	0,0102	0,0193	0,0326	0,0223	0,0549	0,0885	0,0643
2007	0,0080	0,0132	0,0098	0,0187	0,0330	0,0228	0,0533	0,0890	0,0661
2008	0,0077	0,0132	0,0099	0,0181	0,0331	0,0217	0,0521	0,0895	0,0629
2009	0,0076	0,0133	0,0090	0,0176	0,0333	0,0209	0,0508	0,0900	0,0617

	x=90			x=100		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,1875	0,2255	0,2033	0,4183	0,4900	0,4597
2001	0,1834	0,2269	0,2032	0,4166	0,4894	0,4576
2002	0,1802	0,2284	0,1974	0,4149	0,4897	0,4551
2003	0,1772	0,2291	0,2187	0,4128	0,4893	0,4818
2004	0,1738	0,2302	0,1982	0,4108	0,4891	0,4567
2005	0,1707	0,2308	0,2028	0,4086	0,4887	0,4662
2006	0,1679	0,2316	0,1896	0,4070	0,4892	0,4473
2007	0,1649	0,2325	0,1935	0,4049	0,4888	0,4503
2008	0,1625	0,2330	0,1924	0,4030	0,4889	0,4516
2009	0,1604	0,2336	0,1837	0,4019	0,4883	0,4414

Tabla 2.8: Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: España.

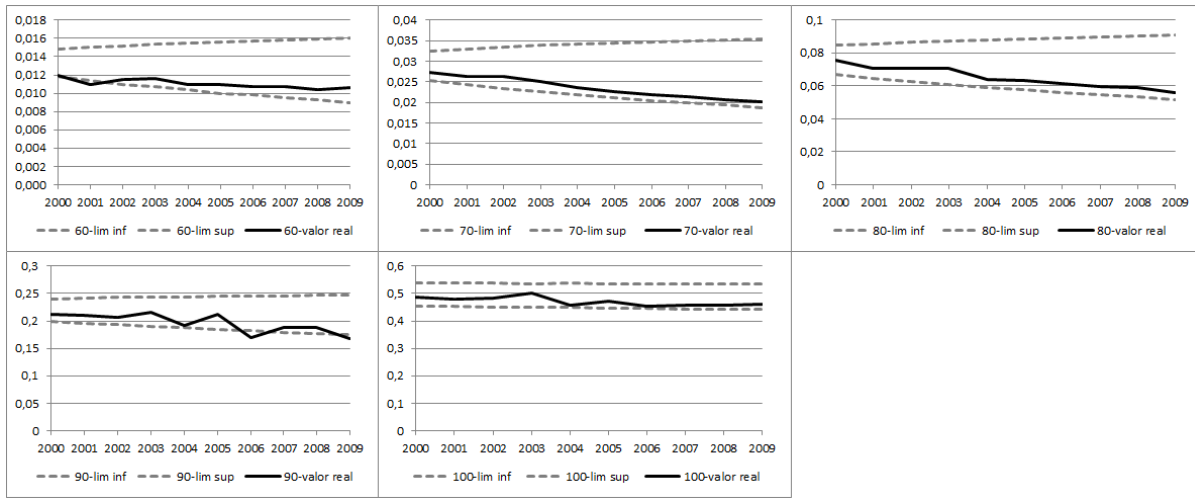


Figura 2.1: Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Francia.

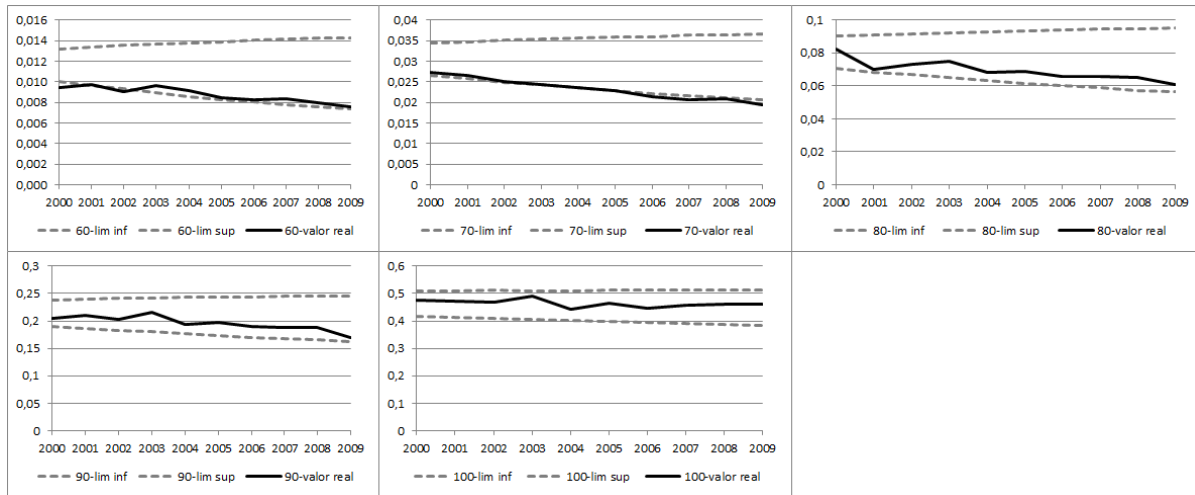


Figura 2.2: Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Italia.

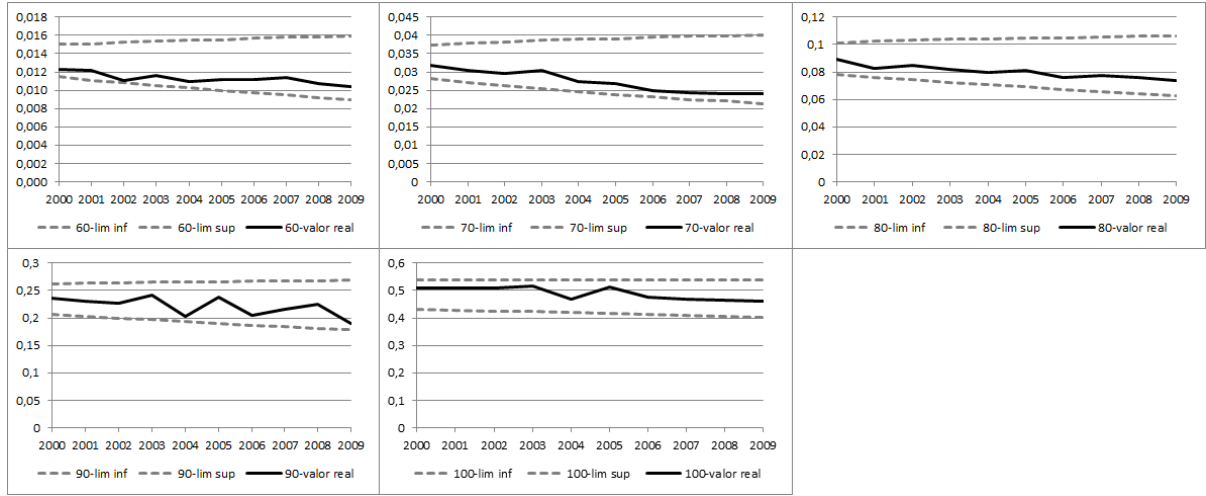


Figura 2.3: Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Portugal.

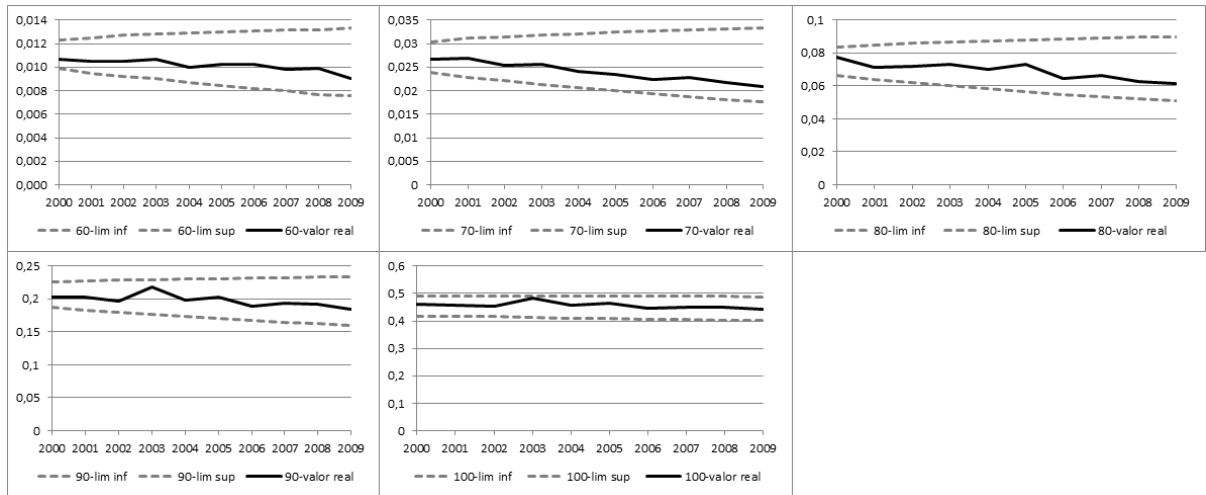


Figura 2.4: Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: España.

Proyección de la mortalidad a largo plazo

Una vez validada la capacidad proyectiva del modelo mediante el ajuste entre la mortalidad proyectada por el modelo y la efectivamente observada, se completa el análisis proyectando la mejora en la mortalidad a largo plazo. Esto es habitual en los negocios de rentas vitalicias y, en este caso, se considera un periodo de 20 años.

En las Figuras 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8 se representan las superficies de mortalidad observadas para los años $t = 2000, \dots, 2009$ seguidas de las superficies de mortalidad proyectadas para los años $t = 2010, \dots, 2029$ en Francia, Italia, Portugal y España, respectivamente.

A la izquierda del eje de los años calendario se observan las tasas centrales de mortalidad observadas $m_x^{(j)}(t)$ representadas por las altura de la superficie para los años $t = 1960, \dots, 2009$. Hacia la derecha del mismo eje, las tasas centrales de mortalidad proyectadas para los años $t = 2010, \dots, 2029$ obtenidas mediante el modelo jerárquico bayesiano.

Como comentario general de este tipo de gráficos, cada cambio de color representa una curva de nivel de la superficie de mortalidad. Es decir, el lugar geométrico donde el valor de la función es constante. En particular, el cambio de azul a rojo es la curva de nivel donde la función vale 0,1, el cambio de rojo a verde donde la función vale 0,2, etc. Desplazándose de forma paralela al eje de las edades, se puede observar que, para cualquier año calendario dado, la mortalidad es creciente con la edad. Y desplazándose de forma paralela al eje del tiempo, para cualquier edad dada se aprecia el decaimiento de los perfiles de mortalidad con el correr del tiempo.

Asimismo, para mayor detalle, en las Tablas 2.9 (a), (b), (c), (d) y (e) se exponen los valores de los perfiles de mortalidad proyectados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 , en los años $t = 2010, \dots, 2029$ para los cuatro países considerados.

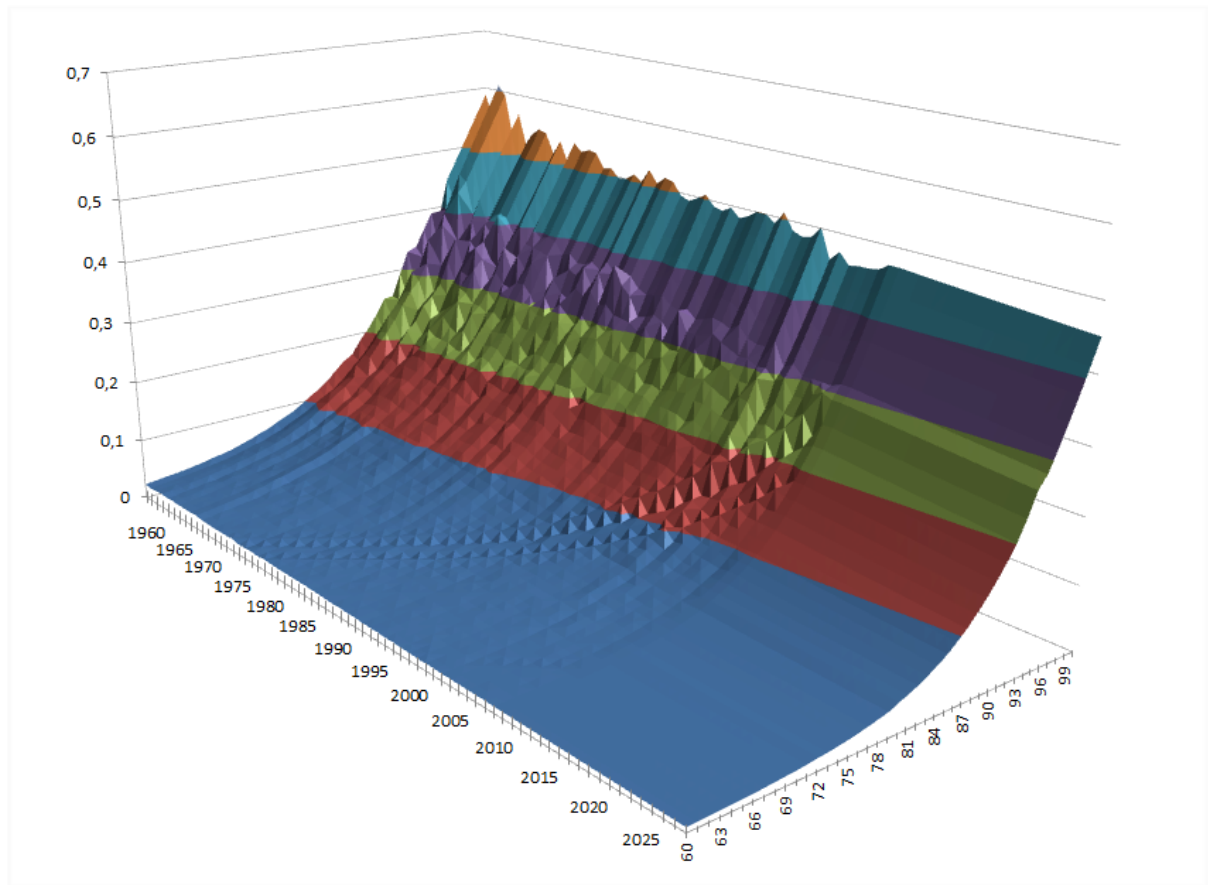


Figura 2.5: Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Francia (enfoque bayesiano).

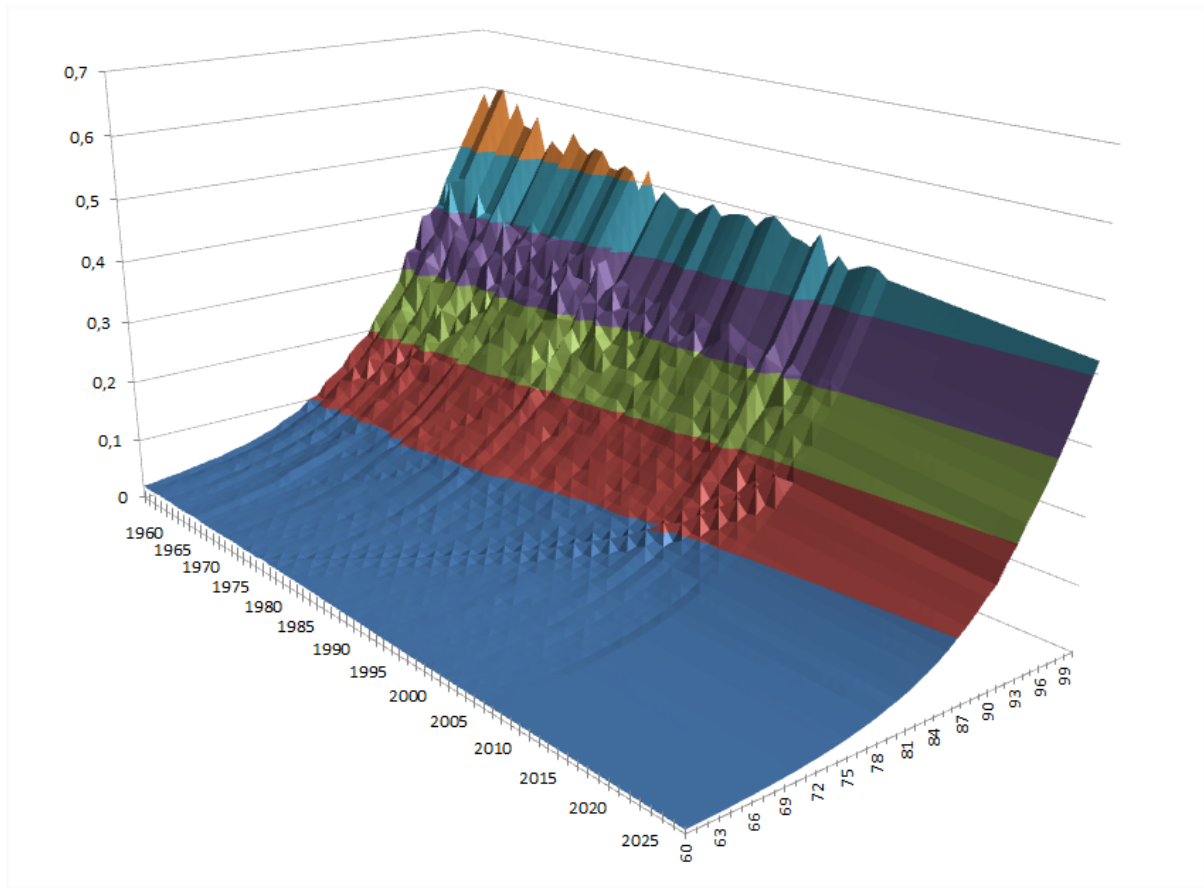


Figura 2.6: Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Italia (enfoque bayesiano).

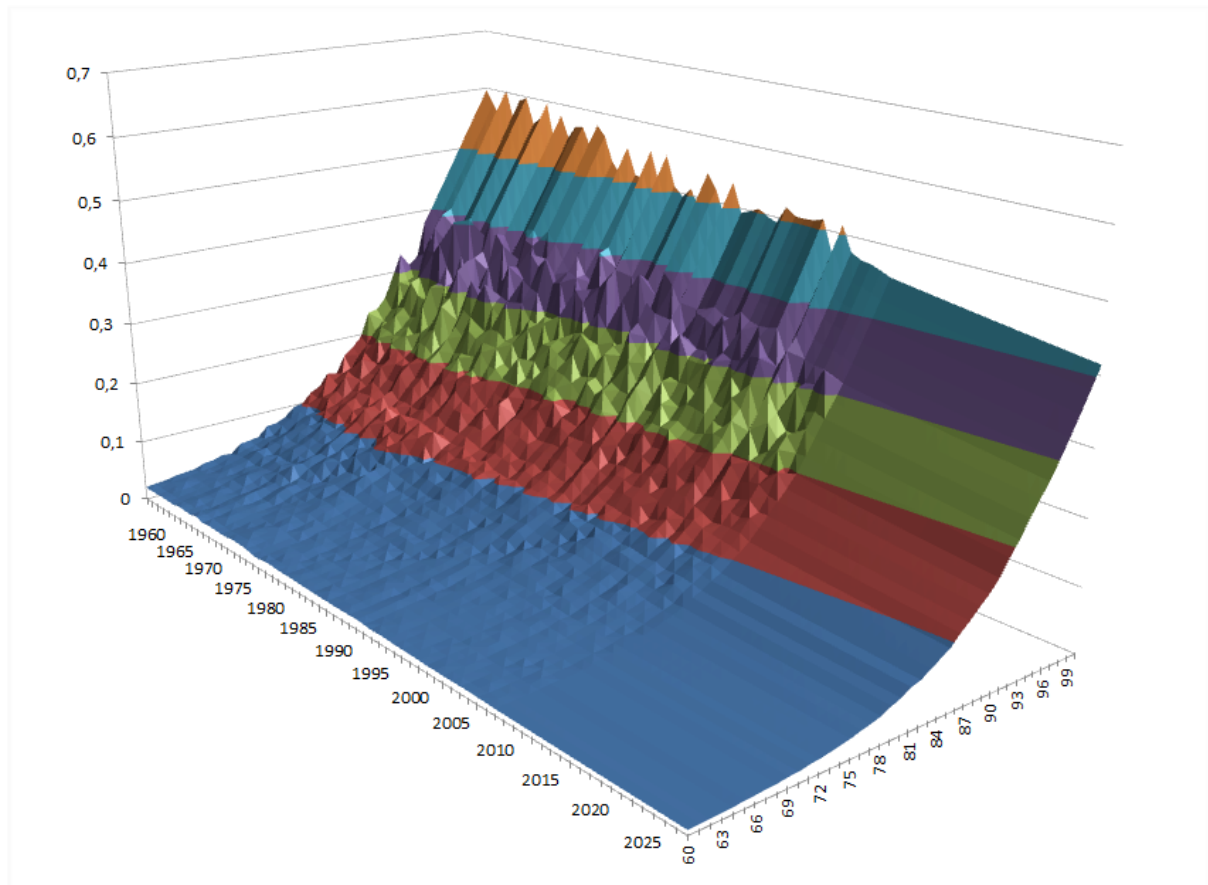


Figura 2.7: Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Portugal (enfoque bayesiano).

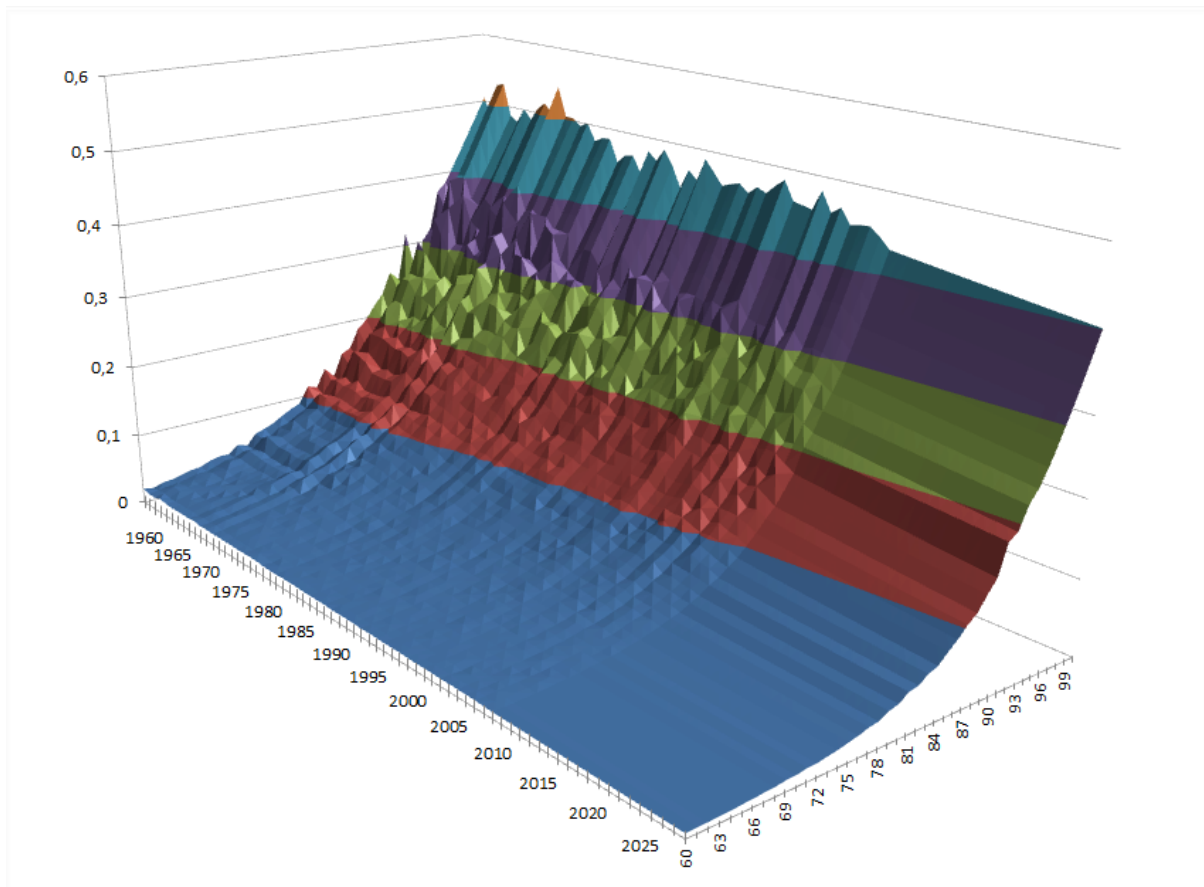


Figura 2.8: Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: España (enfoque bayesiano).

(a) Edad $x = 60$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,0099	0,0099	0,0098	0,0096	0,0095	0,0093	0,0092	0,009	0,0089	0,0088
Italia	0,0078	0,0077	0,0075	0,0074	0,0072	0,0071	0,007	0,0068	0,0067	0,0066
Portugal	0,0099	0,0097	0,0096	0,0094	0,0093	0,0091	0,009	0,0088	0,0087	0,0085
España	0,0086	0,0084	0,0083	0,0082	0,008	0,0079	0,0078	0,0077	0,0076	0,0074
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,0086	0,0085	0,0084	0,0082	0,0081	0,008	0,0079	0,0077	0,0076	0,0075
Italia	0,0064	0,0063	0,0062	0,0061	0,0059	0,0058	0,0057	0,0056	0,0055	0,0054
Portugal	0,0084	0,0083	0,0082	0,008	0,0079	0,0078	0,0077	0,0075	0,0074	0,0073
España	0,0073	0,0072	0,0071	0,007	0,0069	0,0068	0,0067	0,0066	0,0065	0,0064

(b) Edad $x = 70$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,0206	0,0206	0,0203	0,0199	0,0196	0,0192	0,0189	0,0185	0,0182	0,0179
Italia	0,0211	0,0207	0,0204	0,02	0,0197	0,0193	0,019	0,0186	0,0183	0,018
Portugal	0,0233	0,0229	0,0224	0,022	0,0216	0,0212	0,0209	0,0205	0,0201	0,0198
España	0,0198	0,0195	0,0191	0,0188	0,0184	0,0181	0,0178	0,0175	0,0172	0,0168
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,0175	0,0172	0,0169	0,0166	0,0163	0,016	0,0157	0,0155	0,0152	0,0149
Italia	0,0177	0,0174	0,0171	0,0168	0,0165	0,0162	0,0159	0,0156	0,0154	0,0151
Portugal	0,0194	0,0191	0,0187	0,0184	0,018	0,0177	0,0174	0,0171	0,0168	0,0165
España	0,0165	0,0163	0,016	0,0157	0,0154	0,0151	0,0148	0,0146	0,0143	0,0141

(c) Edad $x = 80$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,058	0,058	0,0571	0,0563	0,0554	0,0546	0,0538	0,053	0,0522	0,0514
Italia	0,0633	0,0624	0,0615	0,0607	0,0599	0,0591	0,0583	0,0575	0,0567	0,0559
Portugal	0,0703	0,0693	0,0683	0,0674	0,0665	0,0655	0,0646	0,0637	0,0629	0,062
España	0,058	0,0572	0,0563	0,0554	0,0545	0,0537	0,0529	0,0521	0,0513	0,0505
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,0506	0,0499	0,0491	0,0484	0,0476	0,0469	0,0462	0,0455	0,0449	0,0442
Italia	0,0552	0,0545	0,0537	0,053	0,0523	0,0516	0,0509	0,0502	0,0495	0,0488
Portugal	0,0611	0,0603	0,0595	0,0586	0,0578	0,057	0,0562	0,0555	0,0547	0,054
España	0,0497	0,049	0,0482	0,0474	0,0467	0,046	0,0453	0,0446	0,0439	0,0432

(d) Edad $x = 90$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,1858	0,1858	0,1842	0,1825	0,1809	0,1793	0,1777	0,1761	0,1745	0,173
Italia	0,1833	0,1815	0,1798	0,1781	0,1764	0,1747	0,173	0,1713	0,1697	0,1681
Portugal	0,1987	0,1968	0,1948	0,1929	0,1911	0,1892	0,1873	0,1855	0,1838	0,182
España	0,1756	0,1739	0,1721	0,1705	0,1688	0,1671	0,1655	0,1639	0,1623	0,1607
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,1714	0,1699	0,1685	0,1669	0,1654	0,164	0,1625	0,1611	0,1597	0,1583
Italia	0,1665	0,1649	0,1633	0,1618	0,1602	0,1587	0,1572	0,1557	0,1542	0,1527
Portugal	0,1802	0,1785	0,1767	0,175	0,1733	0,1716	0,17	0,1683	0,1668	0,1651
España	0,1591	0,1576	0,1561	0,1545	0,153	0,1515	0,15	0,1486	0,1472	0,1457

(e) Edad $x = 100$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,4716	0,4716	0,4705	0,4693	0,4681	0,467	0,4658	0,4647	0,4635	0,4624
Italia	0,4493	0,4476	0,4459	0,4442	0,4425	0,4408	0,4391	0,4375	0,4358	0,4342
Portugal	0,4546	0,4524	0,4502	0,448	0,4458	0,4437	0,4415	0,4394	0,4373	0,4352
España	0,4286	0,4271	0,4256	0,4241	0,4226	0,4212	0,4197	0,4182	0,4168	0,4153
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,4612	0,4601	0,459	0,4578	0,4567	0,4556	0,4545	0,4533	0,4522	0,4511
Italia	0,4325	0,4309	0,4293	0,4276	0,426	0,4244	0,4228	0,4212	0,4196	0,418
Portugal	0,4331	0,4311	0,429	0,4269	0,4248	0,4228	0,4207	0,4187	0,4168	0,4147
España	0,4139	0,4125	0,411	0,4096	0,4082	0,4068	0,4054	0,404	0,4026	0,4012

Tabla 2.9: Perfiles de mortalidad proyectados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 , en los años $t = 2010, \dots, 2029$ para los 4 países estudiados (enfoque bayesiano).

2.4 Enfoque clásico

2.4.1 Metodología *data cloning*

La metodología *data cloning* es una técnica de simulación introducida por Lele et al. (2007) que permite obtener aproximaciones de las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros de un modelo jerárquico, así como sus respectivas varianzas asintóticas, valiéndose de algoritmos Monte Carlo de cadenas de Markov (MCMC).

Esta metodología se basa en la idea clave de repetir un experimento reiteradas veces asumiendo que en todos los casos se obtienen los mismos valores observados. Es decir, si se denota a los datos observados como $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, se define un nuevo vector que contiene K clones de los datos: $\mathbf{y}^{(K)} = (\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y})$. Se asume que los clones son independientes unos de otros y que K es lo suficientemente grande. La verosimilitud de $\mathbf{y}^{(K)}$ es igual a la K -ésima potencia de la verosimilitud de los datos originales $[L(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{y})]^K$.

Una vez generada la muestra de datos clonados, $\mathbf{y}^{(K)}$, se genera una muestra de observaciones de la distribución a posteriori $\pi^{(K)}(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{y})$. Esta distribución es proporcional al producto de la función de verosimilitud de la muestra de datos clonados $[L(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{y})]^K$ y la distribución conjunta a priori $\pi(\boldsymbol{\Theta})$ de los parámetros del modelo.

Se puede elegir cualquier distribución propia como distribución a priori, puesto que con la metodología *data cloning* la elección de la distribución a priori se torna prácticamente irrelevante a medida que el número de clones K se incrementa, y la distribución a posteriori conjunta de los parámetros converge a una distribución (multivariante) degenerada en las estimaciones máximo verosímiles.

No obstante, como señalan Lele et al. (2010), cuando las distribuciones a priori son más informativas la convergencia de la distribución a posteriori a las estimaciones máximo verosímiles se alcanza más rápidamente, a la vez que resulta necesario utilizar una menor cantidad K de clones.

Para K suficientemente grande, $\pi^{(K)}(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{y})$ converge a una distribución normal multivariante con vector de medias igual al vector de estimaciones máximo verosímiles de los parámetros, y matriz de varianzas y covarianzas igual al producto de $1/K$ y la inversa de la matriz de información de Fisher de los estimadores de máxima verosimilitud (para mayor detalle, ver apéndice de Lele et al. (2007)).

Una vez simulada una muestra de observaciones de la distribución a posteriori de los parámetros mediante un algoritmo MCMC se computan las medias muestrales. Para K suficientemente grande, éstas resultan ser una aproximación muy ajustada de las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros.

A modo de esquema, el algoritmo de *data cloning* consta en los siguientes pasos:

Paso 1: Crear un conjunto de K datos clonados $\mathbf{y}^{(K)} = (\mathbf{y}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y})$, que consiste en la repetición de K veces del vector de datos originalmente observado.

Paso 2: Haciendo uso de un algoritmo MCMC generar valores de la distribución a posteriori basada en la distribución a priori $\pi(\boldsymbol{\Theta})$ y el vector clonado $\mathbf{y}^{(K)} = (\mathbf{y}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y})$, donde los K clones de \mathbf{y} se asume que son independientes entre sí. En la práctica, cualquier distribución propia puede ser utilizada como distribución a priori.

Paso 3: A partir de las distribuciones a posteriori marginales se computan las medias y varianzas muestrales correspondientes a cada uno de los valores del vector de parámetros del modelo $\boldsymbol{\Theta}$ (para M iteraciones del algoritmo MCMC). Posteriormente, las estimaciones máximo verosímiles de $\boldsymbol{\Theta}$ y su varianzas serán aproximadamente iguales a las medias a posteriori y a K veces las varianzas a posteriori, respectivamente.

2.4.2 Especificación del modelo

La metodología *data cloning* se puede aplicar al contexto del modelo de Lee-Carter siendo los datos las tasas centrales de mortalidad correspondientes a n años y definiendo

$$y_t = \log [m_x(t)],$$

para $t = 1, \dots, n$, de modo que $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, es el vector que al ser replicado K veces da como resultado el vector clonado $\mathbf{y}^{(K)}$.

Como se ha indicado en la Sección 2.4.1, se puede asumir cualquier conjunto de distribuciones a priori en la estructura jerárquica, siempre y cuando éstas sean propias. En particular, se ha asumido el mismo conjunto de distribuciones a priori descrito en la Sección 2.3. Es decir, distribuciones normales para los parámetros $\alpha_x^{(j)}$, distribuciones de Dirichlet para los parámetros $\beta_x^{(j)}$ de modo que se satisfaga la restricción $\sum_x \beta_x = 1$, y distribuciones gamma-inversas para las varianzas dado que son distribuciones conjugadas de la normal.

2.4.3 Aplicación del modelo jerárquico clásico con *data cloning*

Se ha escrito un programa haciendo uso del paquete `dclone` (Sólymos (2009)) de R (R Core Team (2015)).

Con el fin de determinar el número de clones K óptimo se han utilizado los resultados obtenidos anteriormente bajo el enfoque bayesiano. Esto ha permitido usar distribuciones a priori más informativas y, en consecuencia, reducir los tiempos de cálculo del procedimiento.

Se ha determinado el número de clones óptimo considerando los estadísticos que ofrece el paquete `dclone` (Sólymos (2009)), tales como el *r-hat*, el máximo autovalor de la varianza a posteriori, el mínimo error cuadrático y el error cuadrático medio (ver Lele

et al. (2010)). Puesto que no se observaron mejoras significativas en los valores de dichos estadísticos cuando la cantidad de clones fue superior a 5, se determinó como número de clones a utilizar $K = 5$.

Se estimaron los parámetros del modelo así como sus desviaciones estándar, trabajando con 5 clones y 50.000 iteraciones del algoritmo MCMC.

En la Tabla 2.10 se exponen las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros $\{\alpha_x^{(j)}\}$ y $\{\beta_x^{(j)}\}$ para los cuatro países considerados.

En la Tabla 2.11 se exponen los valores de las estimaciones máximo verosímiles del factor de mortalidad κ_t , para los años que constituyen la muestra de entrenamiento, es decir, $t = 1960, \dots, 1999$.

Y en la Tabla 2.12, se exponen los valores proyectados del factor κ_t para los años de la muestra de validación, es decir, $t = 2000, \dots, 2009$.

	Francia		Italia		Portugal		España	
x	α_x	β_x	α_x	β_x	α_x	β_x	α_x	β_x
60	-4,0243	0,03	-4,113	0,0351	-4,0397	0,029	-4,2044	0,03
61	-3,9446	0,0303	-4,0152	0,034	-3,9735	0,026	-4,1505	0,0256
62	-3,8651	0,0316	-3,9236	0,0337	-3,8695	0,0301	-4,026	0,033
63	-3,7819	0,0311	-3,8382	0,0335	-3,7714	0,0293	-3,9418	0,0309
64	-3,7058	0,0317	-3,7427	0,0317	-3,6946	0,0299	-3,8408	0,032
65	-3,6258	0,0326	-3,6501	0,0316	-3,5988	0,029	-3,7456	0,033
66	-3,5493	0,0334	-3,562	0,0307	-3,5148	0,0291	-3,6686	0,0306
67	-3,4664	0,0332	-3,4691	0,0296	-3,4115	0,0292	-3,5647	0,0318
68	-3,3808	0,0334	-3,3842	0,0292	-3,3091	0,0307	-3,4674	0,0331
69	-3,3033	0,0337	-3,2908	0,0291	-3,2202	0,0289	-3,3897	0,0302
70	-3,2115	0,0338	-3,2009	0,0297	-3,0961	0,0329	-3,2687	0,0341
71	-3,1285	0,0339	-3,1138	0,0277	-3,0272	0,0293	-3,2097	0,0283
72	-3,0429	0,033	-3,015	0,0287	-2,9106	0,0321	-3,062	0,0362
73	-2,9529	0,0336	-2,9273	0,0282	-2,8121	0,0308	-2,9793	0,0327
74	-2,8634	0,0337	-2,8336	0,0279	-2,7064	0,0312	-2,8731	0,0334
75	-2,7693	0,0337	-2,7415	0,0276	-2,6037	0,0314	-2,7857	0,0324
76	-2,6772	0,0332	-2,6491	0,0269	-2,5001	0,0301	-2,6853	0,0321
77	-2,5813	0,0325	-2,5554	0,0269	-2,3999	0,0301	-2,5922	0,0296
78	-2,4839	0,0314	-2,4593	0,0265	-2,2868	0,0305	-2,4749	0,0337
79	-2,3883	0,0315	-2,3624	0,0252	-2,1942	0,0285	-2,4015	0,0278
80	-2,2887	0,0295	-2,2564	0,027	-2,149	0,0266	-2,2903	0,0305
81	-2,1882	0,0276	-2,165	0,0257	-2,069	0,0248	-2,2265	0,0239
82	-2,0887	0,027	-2,0725	0,0254	-1,9654	0,0268	-2,0936	0,0295
83	-1,9929	0,025	-1,9723	0,0245	-1,8663	0,0242	-2,0226	0,0261
84	-1,8961	0,0236	-1,883	0,0238	-1,7777	0,0247	-1,902	0,0289
85	-1,8039	0,023	-1,7899	0,023	-1,6859	0,0246	-1,8352	0,0249
86	-1,7042	0,0223	-1,6997	0,0221	-1,6019	0,0225	-1,7364	0,0244
87	-1,6184	0,0206	-1,6064	0,0216	-1,5102	0,0209	-1,6502	0,0221
88	-1,5273	0,0186	-1,5184	0,0207	-1,4208	0,0213	-1,5535	0,0232
89	-1,4402	0,0178	-1,4314	0,0208	-1,3401	0,0219	-1,4802	0,019
90	-1,351	0,0167	-1,3412	0,0202	-1,2645	0,0192	-1,3899	0,0191
91	-1,2581	0,0163	-1,2656	0,0189	-1,2023	0,018	-1,3745	0,0077
92	-1,1878	0,0142	-1,1759	0,0187	-1,1046	0,0151	-1,2521	0,0135
93	-1,1086	0,0117	-1,1062	0,0166	-1,0469	0,017	-1,2014	0,0115
94	-1,0318	0,0097	-1,0279	0,017	-0,984	0,0174	-1,1029	0,0122
95	-0,9667	0,0102	-0,9677	0,0154	-0,9083	0,015	-1,0368	0,0114
96	-0,8982	0,0091	-0,9003	0,0146	-0,8447	0,0141	-0,9698	0,0103
97	-0,8328	0,008	-0,8359	0,0138	-0,784	0,0133	-0,9054	0,0092
98	-0,7705	0,0069	-0,7746	0,013	-0,7262	0,0125	-0,8437	0,0082
99	-0,7114	0,0059	-0,7163	0,0122	-0,6713	0,0117	-0,7847	0,0073
100	-0,6555	0,0049	-0,6611	0,0114	-0,6195	0,0109	-0,7286	0,0064

Tabla 2.10: Estimaciones máximo verosímiles de los parámetros $\alpha_x^{(j)}$ y $\beta_x^{(j)}$.

Parámetro	Estimación puntual
κ_{1960}	6,8695
κ_{1961}	4,8884
κ_{1962}	7,2288
κ_{1963}	7,7679
κ_{1964}	5,3797
κ_{1965}	6,1337
κ_{1966}	5,4692
κ_{1967}	5,474
κ_{1968}	5,8432
κ_{1969}	7,3661
κ_{1970}	4,4237
κ_{1971}	5,9231
κ_{1972}	3,6914
κ_{1973}	4,7653
κ_{1974}	4,1977
κ_{1975}	4,2235
κ_{1976}	3,9702
κ_{1977}	2,4769
κ_{1978}	2,0447
κ_{1979}	0,6543
κ_{1980}	0,4806
κ_{1981}	0,0971
κ_{1982}	-1,5834
κ_{1983}	-0,5256
κ_{1984}	-1,8773
κ_{1985}	-1,503
κ_{1986}	-2,7827
κ_{1987}	-4,1458
κ_{1988}	-4,4033
κ_{1989}	-5,2471
κ_{1990}	-5,0823
κ_{1991}	-5,5833
κ_{1992}	-6,8807
κ_{1993}	-6,625
κ_{1994}	-8,1193
κ_{1995}	-8,1697
κ_{1996}	-8,4679
κ_{1997}	-9,3162
κ_{1998}	-9,3263
κ_{1999}	-9,7302

Tabla 2.11: Estimaciones máximo verosímiles del índice de mortalidad κ_t histórico.

Parámetro	Media predictiva
κ_{2000}	-10,1375
κ_{2001}	-10,5478
κ_{2002}	-10,9528
κ_{2003}	-11,3605
κ_{2004}	-11,7743
κ_{2005}	-12,1811
κ_{2006}	-12,5859
κ_{2007}	-13,0000
κ_{2008}	-13,4103
κ_{2009}	-13,8165

Tabla 2.12: Índice de mortalidad κ_t proyectado.

Con el fin de validar la capacidad proyectiva del modelo, la muestra fue dividida en dos: la primera submuestra incluye datos desde el año 1960 hasta 1999 y constituye la muestra de entrenamiento, mientras que la segunda submuestra incluye datos desde el año 1999 hasta el 2009 y constituye la muestra de validación.

Utilizando las estimaciones de $\alpha_x^{(j)}$ y $\beta_x^{(j)}$ para cada edad x correspondiente a cada país junto con los valores proyectados de κ_t , se proyectan los valores de los logaritmos de las tasas centrales de mortalidad $\log \left[m_x^{(j)}(t) \right]$ para el periodo 2000-2009.

Los intervalos de predicción al 95% de confianza basados en la aproximación de Wald, así como las verdaderas tasas centrales de mortalidad, se exponen en las Tablas 2.13, 2.14 , 2.15 y 2.16 para las edades $x= 60, 70, 80, 90$ y 100 y para el horizonte temporal $t = 2000, \dots, 2009$ para Francia, Italia, Portugal y España, respectivamente. Se puede observar que todos los intervalos contienen a los verdaderos valores de los parámetros.

Por su parte, para una visualización gráfica, en las Figuras 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12 están representadas las bandas de predicción al 95% de confianza y las trayectorias de mortalidad observadas para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 para Francia, Italia, Portugal y España, respectivamente. Aquí se puede apreciar también que las bandas de predicción generadas a partir de la muestra de entrenamiento contienen a las trayectorias de mortalidad observadas en la muestra de validación.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor
	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real
2000	0,0104	0,0167	0,0119	0,0223	0,0367	0,0273	0,0595	0,0950	0,0757
2001	0,0098	0,0173	0,011	0,0207	0,0384	0,0262	0,0561	0,0985	0,0705
2002	0,0093	0,0179	0,0115	0,0194	0,0399	0,0262	0,0530	0,1017	0,0704
2003	0,0088	0,0184	0,0116	0,0183	0,0412	0,0250	0,0504	0,1044	0,0705
2004	0,0084	0,0189	0,0109	0,0173	0,0424	0,0236	0,0480	0,1071	0,0642
2005	0,0080	0,0193	0,0109	0,0164	0,0436	0,0227	0,0458	0,1096	0,0634
2006	0,0076	0,0198	0,0107	0,0155	0,0448	0,0219	0,0437	0,1122	0,0613
2007	0,0073	0,0202	0,0107	0,0147	0,0459	0,0214	0,0417	0,1146	0,0598
2008	0,0069	0,0206	0,0104	0,0140	0,0470	0,0206	0,0400	0,1167	0,0588
2009	0,0066	0,0210	0,0106	0,0133	0,0480	0,0202	0,0383	0,1189	0,0561

	x=90			x=100		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor
	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real
2000	0,1796	0,2656	0,2127	0,4137	0,5895	0,4855
2001	0,1749	0,2692	0,2097	0,4121	0,5894	0,4798
2002	0,1704	0,2724	0,2074	0,4105	0,5894	0,4835
2003	0,1661	0,2758	0,2166	0,4091	0,5890	0,5012
2004	0,1622	0,2785	0,1921	0,4069	0,5898	0,4566
2005	0,1583	0,2816	0,2121	0,4052	0,5899	0,4719
2006	0,1547	0,2844	0,1697	0,4035	0,5899	0,4552
2007	0,1511	0,2871	0,1889	0,4015	0,5906	0,4583
2008	0,1475	0,2900	0,1873	0,3997	0,5907	0,4588
2009	0,1441	0,2928	0,1686	0,3978	0,5910	0,4613

Tabla 2.13: Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Francia.

t	x=60			x=70			x=80		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0087	0,0151	0,0094	0,0233	0,039	0,0274	0,0620	0,1023	0,0823
2001	0,0081	0,0158	0,0097	0,0219	0,0404	0,0266	0,0590	0,1052	0,0702
2002	0,0076	0,0164	0,0090	0,0208	0,0415	0,0251	0,0563	0,1078	0,0734
2003	0,0071	0,0169	0,0096	0,0199	0,0426	0,0244	0,0538	0,1103	0,0749
2004	0,0067	0,0174	0,0091	0,0189	0,0436	0,0235	0,0516	0,1125	0,0681
2005	0,0064	0,0179	0,0085	0,0180	0,0447	0,0228	0,0494	0,1150	0,0689
2006	0,0060	0,0184	0,0083	0,0172	0,0456	0,0213	0,0475	0,1171	0,0656
2007	0,0057	0,0188	0,0084	0,0165	0,0466	0,0206	0,0456	0,1192	0,0660
2008	0,0054	0,0193	0,0080	0,0158	0,0475	0,0208	0,0439	0,1212	0,0653
2009	0,0051	0,0198	0,0076	0,0151	0,0484	0,0195	0,0423	0,1231	0,0611

t	x=90			x=100		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,1690	0,2687	0,2038	0,3711	0,5696	0,4759
2001	0,1636	0,2730	0,2106	0,3659	0,5724	0,4736
2002	0,1586	0,2770	0,2028	0,3613	0,5743	0,4674
2003	0,1539	0,2807	0,2162	0,3568	0,5765	0,4914
2004	0,1493	0,2846	0,1929	0,3518	0,5791	0,4442
2005	0,1450	0,2883	0,1981	0,3470	0,5817	0,4653
2006	0,1408	0,2921	0,1907	0,3422	0,5842	0,4479
2007	0,1368	0,2959	0,1878	0,3375	0,5871	0,4558
2008	0,1332	0,2986	0,1887	0,3330	0,5892	0,4622
2009	0,1295	0,3022	0,1698	0,3287	0,5916	0,4611

Tabla 2.14: Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Italia.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor
	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real
2000	0,0100	0,0172	0,0123	0,0245	0,0429	0,0318	0,0686	0,1155	0,0892
2001	0,0095	0,0177	0,0122	0,0230	0,0446	0,0304	0,0653	0,1186	0,0829
2002	0,0090	0,0181	0,0111	0,0216	0,0460	0,0297	0,0625	0,1213	0,0850
2003	0,0086	0,0186	0,0116	0,0205	0,0473	0,0304	0,0598	0,1240	0,0821
2004	0,0082	0,0190	0,0109	0,0194	0,0487	0,0273	0,0574	0,1264	0,0799
2005	0,0079	0,0194	0,0112	0,0184	0,0499	0,0267	0,0552	0,1287	0,0808
2006	0,0075	0,0198	0,0112	0,0175	0,0512	0,0250	0,0530	0,1312	0,0756
2007	0,0072	0,0202	0,0114	0,0166	0,0523	0,0242	0,0510	0,1336	0,0771
2008	0,0069	0,0206	0,0107	0,0159	0,0533	0,0240	0,0490	0,1358	0,0763
2009	0,0066	0,0210	0,0104	0,0151	0,0545	0,0241	0,0472	0,1379	0,0739

	x=90			x=100		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor
real	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real
2000	0,1822	0,2961	0,2359	0,3833	0,6049	0,5088
2001	0,1770	0,3003	0,2310	0,3788	0,6072	0,5082
2002	0,1720	0,3039	0,2259	0,3740	0,6089	0,5094
2003	0,1673	0,3077	0,2416	0,3692	0,6113	0,5147
2004	0,1628	0,3112	0,2030	0,3652	0,6126	0,4666
2005	0,1586	0,3148	0,2383	0,3606	0,6151	0,5130
2006	0,1543	0,3184	0,2052	0,3557	0,6176	0,4765
2007	0,1502	0,3220	0,2163	0,3517	0,6193	0,4685
2008	0,1466	0,3247	0,2243	0,3476	0,6210	0,4663
2009	0,1428	0,3281	0,1890	0,3431	0,6238	0,4611

Tabla 2.15: Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Portugal.

t	x=60			x=70			x=80		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0088	0,0138	0,0107	0,0212	0,0343	0,0266	0,0592	0,0932	0,0775
2001	0,0083	0,0144	0,0105	0,0196	0,0359	0,0269	0,0554	0,0971	0,0716
2002	0,0078	0,0148	0,0105	0,0184	0,0373	0,0253	0,0522	0,1004	0,0722
2003	0,0074	0,0152	0,0107	0,0173	0,0387	0,0255	0,0495	0,1035	0,0729
2004	0,0070	0,0157	0,0100	0,0163	0,0399	0,0240	0,0470	0,1063	0,0701
2005	0,0067	0,0161	0,0102	0,0154	0,0411	0,0235	0,0447	0,1089	0,0734
2006	0,0064	0,0164	0,0102	0,0146	0,0422	0,0223	0,0426	0,1116	0,0643
2007	0,0061	0,0168	0,0098	0,0138	0,0432	0,0228	0,0408	0,1138	0,0661
2008	0,0058	0,0171	0,0099	0,0131	0,0442	0,0217	0,0389	0,1163	0,0629
2009	0,0056	0,0175	0,0090	0,0125	0,0452	0,0209	0,0372	0,1187	0,0617

t	x=90			x=100		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,1699	0,2478	0,2033	0,3841	0,5329	0,4597
2001	0,1641	0,2526	0,2032	0,3818	0,5335	0,4576
2002	0,1591	0,2564	0,1974	0,3794	0,5337	0,4551
2003	0,1540	0,2608	0,2187	0,3770	0,5344	0,4818
2004	0,1496	0,2643	0,1982	0,3746	0,5354	0,4567
2005	0,1454	0,2680	0,2028	0,3720	0,5360	0,4662
2006	0,1413	0,2712	0,1896	0,3692	0,5371	0,4473
2007	0,1374	0,2749	0,1935	0,3669	0,5377	0,4503
2008	0,1338	0,2779	0,1924	0,3645	0,5387	0,4516
2009	0,1302	0,2810	0,1837	0,3623	0,5392	0,4414

Tabla 2.16: Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: España.

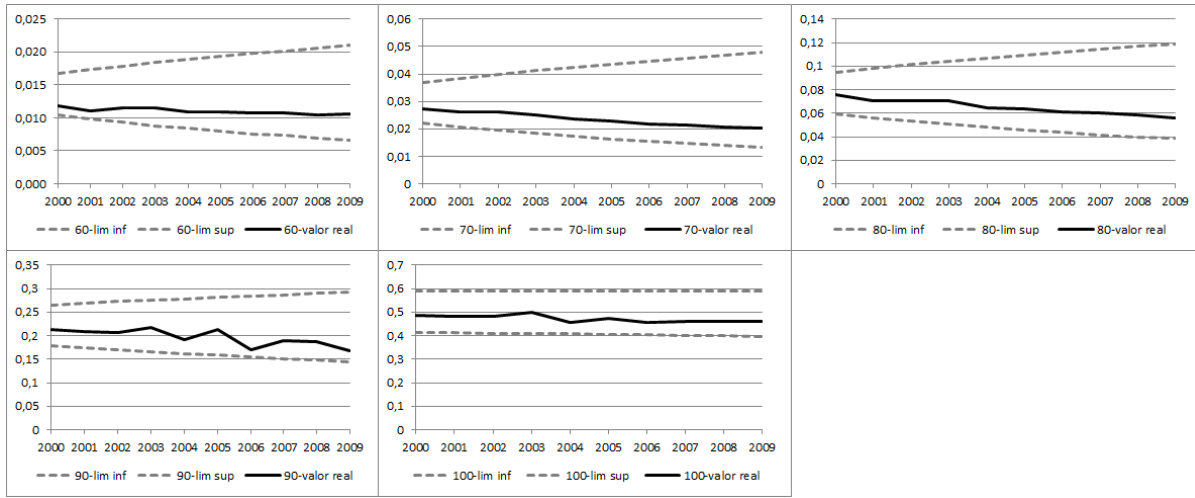


Figura 2.9: Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Francia.

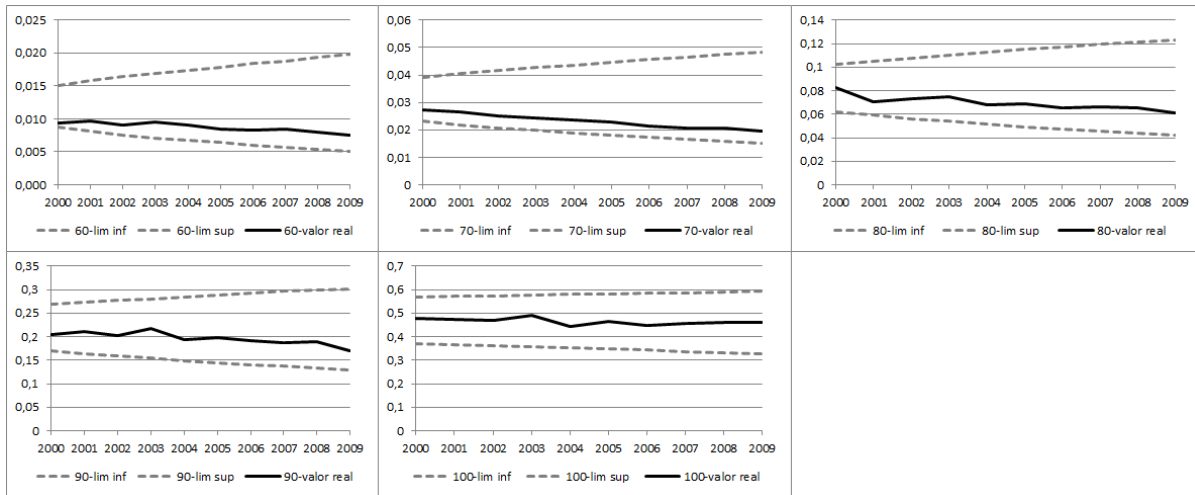


Figura 2.10: Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Italia.

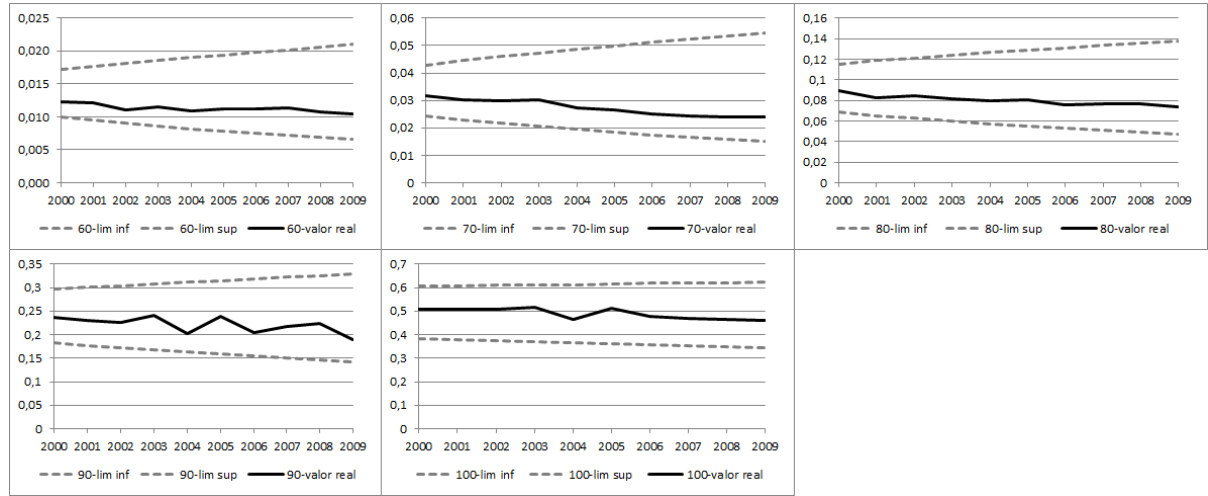


Figura 2.11: Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: Portugal.

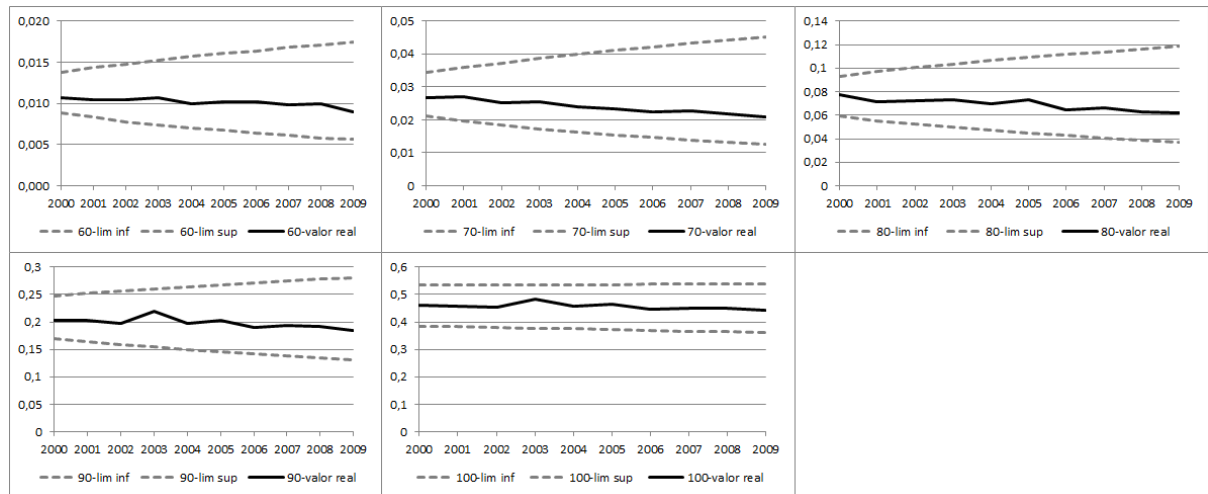


Figura 2.12: Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x^{(j)}(t)$: España.

Se puede observar que los intervalos de las Tablas 2.13, 2.14, 2.15 y 2.16 y bandas de las Figuras 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12 obtenidos mediante *data cloning* son similares a los obtenidos mediante el modelo jerárquico bayesiano de las Tablas 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8 y Figuras 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4, aunque los intervalos construidos con la metodología *data cloning* contienen a los verdaderos parámetros más veces que los construidos con la metodología bayesiana. No obstante, la interpretación es diferente: los primeros deben ser interpretados en un sentido *frecuentista*, mientras que los segundos en sentido de *densidad a posteriori* (*highest posterior density*, *HPD*).

Proyección de la mortalidad a largo plazo

Así como se ha hecho que en la Sección 2.3, habiendo validado la capacidad proyectiva del modelo con el ajuste entre la mortalidad proyectada por el modelo y la efectivamente observada, se completa el análisis mediante la proyección de la mejora en la mortalidad a largo plazo. Nuevamente se considera un periodo de 20 años.

En las Figuras 2.13, 2.14, 2.15 y 2.16 se representan las superficies de mortalidad observadas para los años $t = 2000, \dots, 2009$, seguidas de las superficies de mortalidad proyectadas para los años $t = 2010, \dots, 2029$ en Francia, Italia, Portugal y España, respectivamente.

Asimismo, para mayor detalle, en las Tablas 2.17 (a), (b), (c), (d) y (e) se exponen los valores de los perfiles de mortalidad proyectados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 , en los años $t = 2010, \dots, 2029$ para los 4 países.

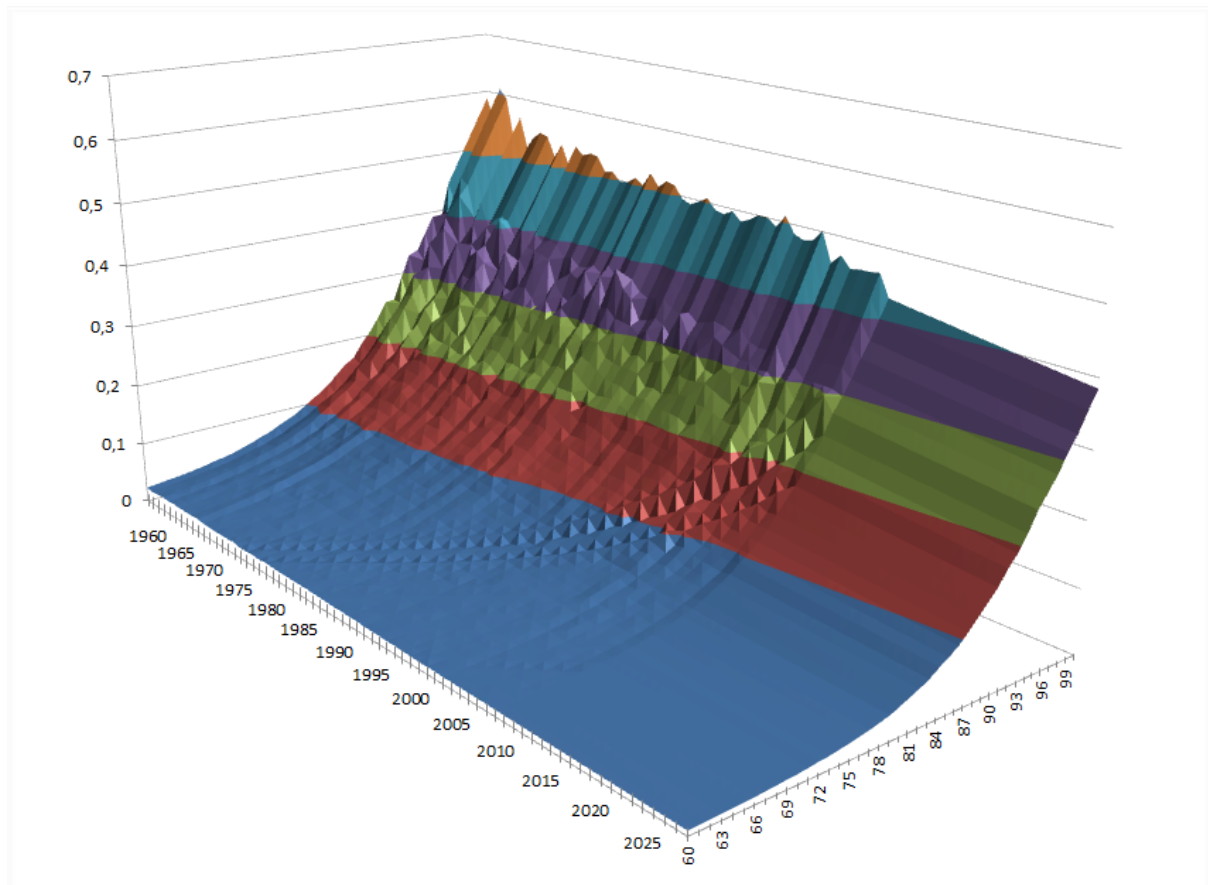


Figura 2.13: Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Francia (enfoque clásico).

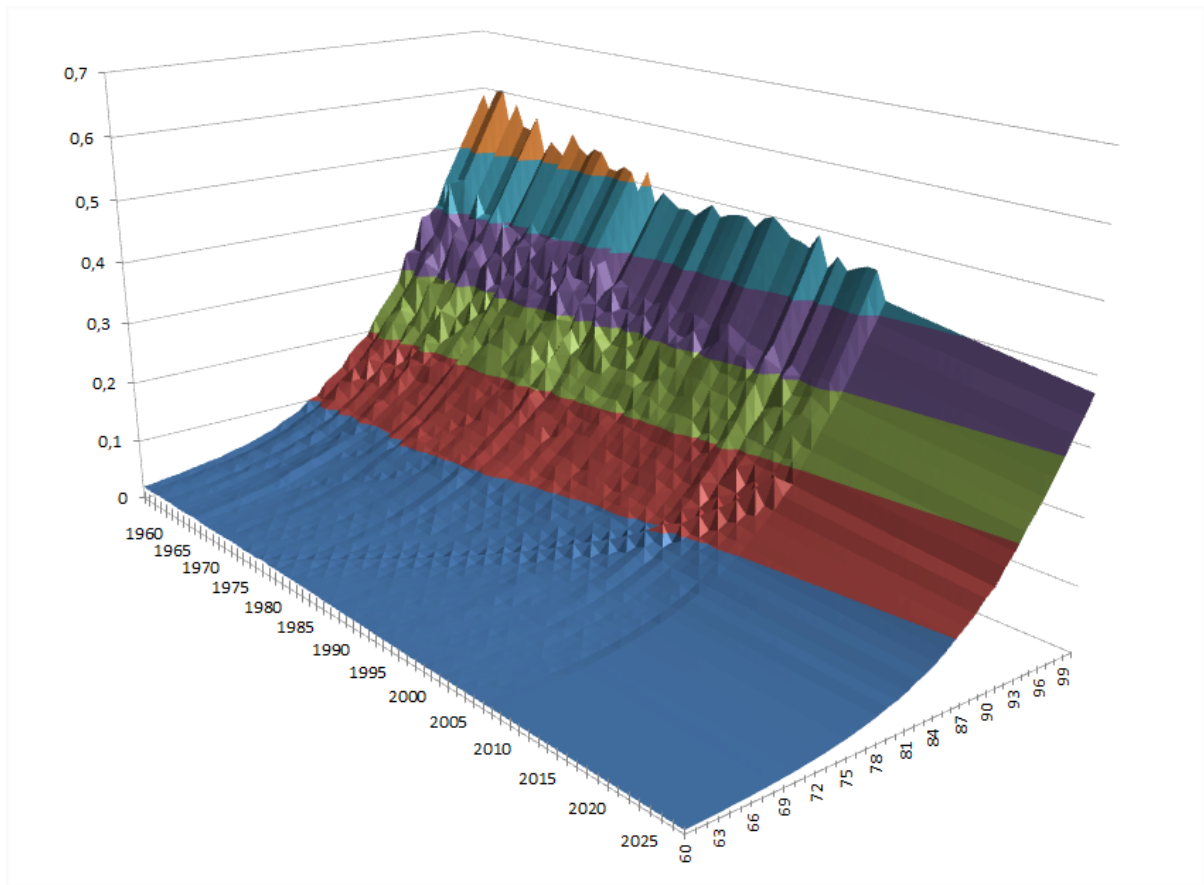


Figura 2.14: Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Italia (enfoque clásico).

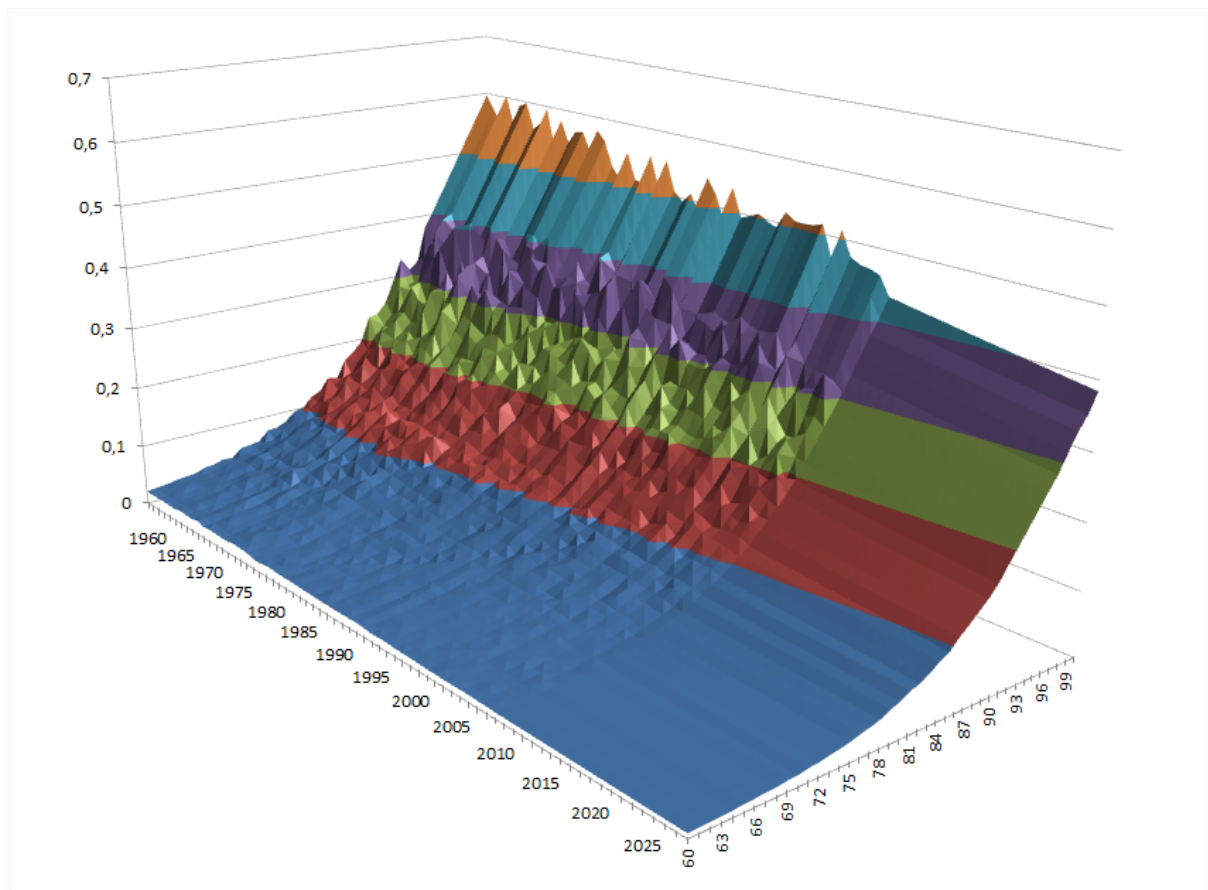


Figura 2.15: Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: Portugal (enfoque clásico).

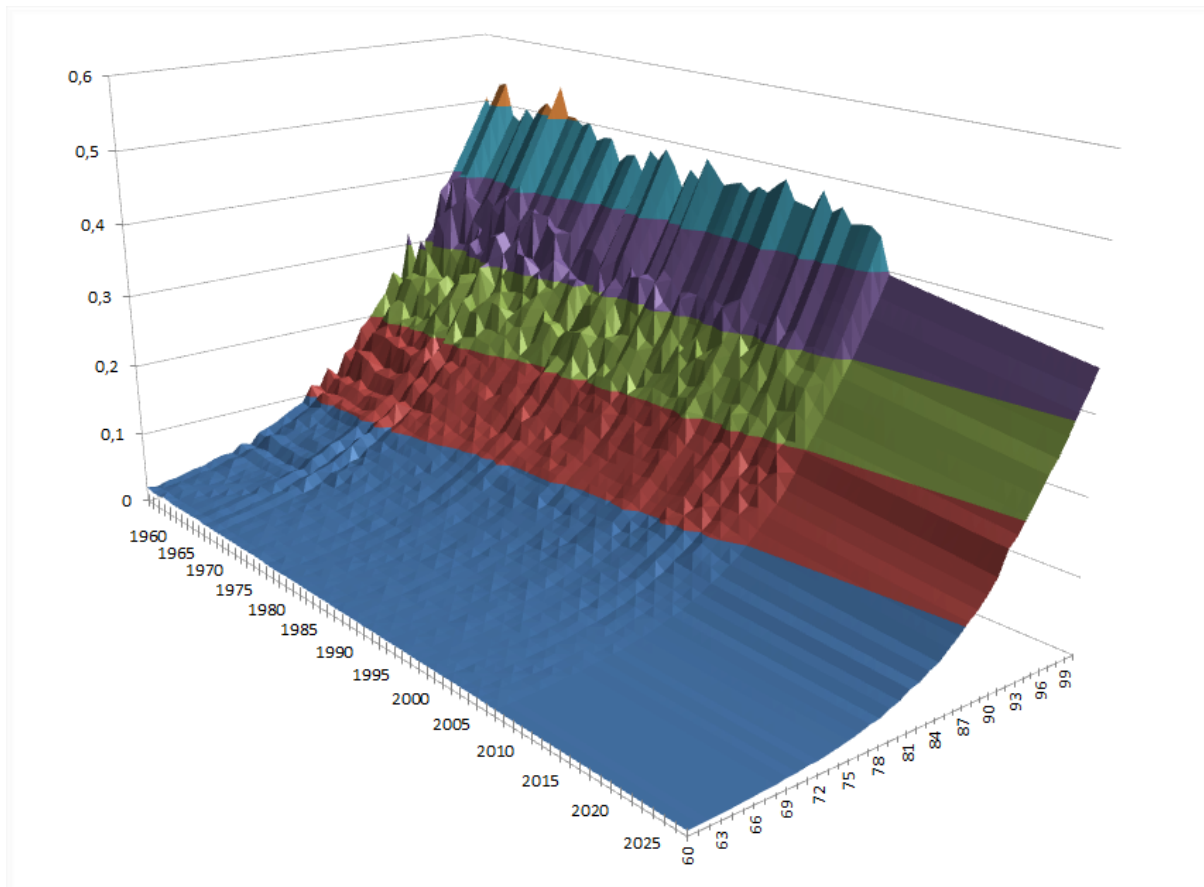


Figura 2.16: Superficie de mortalidad histórica y proyectada a largo plazo: España (enfoque clásico).

(a) Edad $x = 60$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,0101	0,0099	0,0098	0,0096	0,0095	0,0093	0,0092	0,0091	0,0089	0,0088
Italia	0,0079	0,0077	0,0076	0,0074	0,0073	0,0072	0,007	0,0069	0,0068	0,0066
Portugal	0,0099	0,0097	0,0096	0,0094	0,0093	0,0092	0,009	0,0089	0,0087	0,0086
España	0,0086	0,0085	0,0084	0,0082	0,0081	0,008	0,0079	0,0078	0,0077	0,0075
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,0087	0,0085	0,0084	0,0083	0,0082	0,008	0,0079	0,0078	0,0077	0,0076
Italia	0,0065	0,0064	0,0063	0,0061	0,006	0,0059	0,0058	0,0057	0,0056	0,0055
Portugal	0,0085	0,0083	0,0082	0,0081	0,008	0,0078	0,0077	0,0076	0,0075	0,0074
España	0,0074	0,0073	0,0072	0,0071	0,007	0,0069	0,0068	0,0067	0,0066	0,0065

(b) Edad $x = 70$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,0209	0,0206	0,0202	0,0199	0,0195	0,0192	0,0189	0,0186	0,0182	0,0179
Italia	0,0212	0,0208	0,0205	0,0201	0,0198	0,0195	0,0192	0,0188	0,0185	0,0182
Portugal	0,0233	0,0229	0,0224	0,0221	0,0217	0,0213	0,0209	0,0206	0,0202	0,0198
España	0,0200	0,0196	0,0193	0,0190	0,0186	0,0183	0,0180	0,0177	0,0174	0,0171
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,0176	0,0173	0,0170	0,0167	0,0165	0,0162	0,0159	0,0156	0,0153	0,0151
Italia	0,0179	0,0176	0,0173	0,0170	0,0167	0,0164	0,0161	0,0159	0,0156	0,0153
Portugal	0,0195	0,0192	0,0188	0,0185	0,0182	0,0178	0,0175	0,0172	0,0169	0,0166
España	0,0168	0,0165	0,0162	0,0160	0,0157	0,0154	0,0151	0,0149	0,0146	0,0144

(c) Edad $x = 80$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,0583	0,0574	0,0566	0,0557	0,0550	0,0542	0,0534	0,0526	0,0518	0,0511
Italia	0,0633	0,0624	0,0616	0,0608	0,0600	0,0593	0,0585	0,0577	0,0569	0,0562
Portugal	0,0704	0,0694	0,0684	0,0675	0,0666	0,0658	0,0649	0,0640	0,0631	0,0623
España	0,0586	0,0577	0,0568	0,0560	0,0552	0,0544	0,0536	0,0528	0,0520	0,0513
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,0504	0,0496	0,0489	0,0482	0,0475	0,0468	0,0461	0,0454	0,0448	0,0441
Italia	0,0554	0,0547	0,0540	0,0533	0,0526	0,0519	0,0511	0,0505	0,0498	0,0491
Portugal	0,0615	0,0606	0,0598	0,0590	0,0582	0,0574	0,0566	0,0558	0,0551	0,0544
España	0,0505	0,0498	0,0491	0,0483	0,0476	0,0469	0,0462	0,0455	0,0448	0,0442

(d) Edad $x = 90$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Francia	0,1837	0,1820	0,1803	0,1787	0,1772	0,1757	0,1741	0,1724	0,1709	0,1693
Italia	0,1817	0,1799	0,1781	0,1764	0,1748	0,1732	0,1716	0,1699	0,1682	0,1666
Portugal	0,1966	0,1946	0,1926	0,1907	0,1889	0,1872	0,1854	0,1835	0,1817	0,1799
España	0,1743	0,1725	0,1708	0,1691	0,1675	0,1660	0,1643	0,1627	0,1611	0,1595
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,1678	0,1663	0,1648	0,1633	0,1618	0,1603	0,1588	0,1574	0,1560	0,1546
Italia	0,1650	0,1635	0,1619	0,1603	0,1587	0,1572	0,1556	0,1541	0,1527	0,1512
Portugal	0,1781	0,1764	0,1747	0,1729	0,1712	0,1695	0,1678	0,1661	0,1646	0,1629
España	0,1580	0,1564	0,1549	0,1534	0,1519	0,1504	0,1488	0,1473	0,1460	0,1445

(e) Edad $x = 100$

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
France	0,4276	0,4252	0,4228	0,4205	0,4183	0,4161	0,4138	0,4115	0,4092	0,4069
Italia	0,4193	0,4168	0,4143	0,4119	0,4095	0,4073	0,4049	0,4024	0,4000	0,3977
Portugal	0,4331	0,4303	0,4276	0,4249	0,4224	0,4199	0,4173	0,4147	0,4120	0,4094
España	0,3963	0,3939	0,3915	0,3892	0,3871	0,3849	0,3827	0,3804	0,3781	0,3759
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Francia	0,4047	0,4025	0,4003	0,3981	0,3959	0,3937	0,3914	0,3892	0,3872	0,3850
Italia	0,3954	0,3931	0,3907	0,3884	0,3861	0,3838	0,3815	0,3792	0,3771	0,3748
Portugal	0,4069	0,4045	0,4019	0,3994	0,3969	0,3944	0,3918	0,3894	0,3870	0,3846
España	0,3737	0,3716	0,3694	0,3672	0,3650	0,3629	0,3607	0,3585	0,3565	0,3544

Tabla 2.17: Perfiles de mortalidad proyectados para la edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 , en los años $t = 2010, \dots, 2029$ para los 4 países estudiados (enfoque clásico).

2.5 Consideraciones finales

En este capítulo se ha planteado una especificación jerárquica del modelo de Lee-Carter para proyectar las tasas centrales de mortalidad de un conjunto de países relacionados y con estructuras socio-demográficas semejantes.

Si bien se ha asumido que cada país tiene sus características propias, el modelo planteado se basa en la existencia de una estructura de mortalidad latente común. Esta idea resulta bastante interesante a la hora de estimar los parámetros del modelo, puesto que permite aprovechar y explotar todo el conjunto de información. Es decir, las proyecciones de mortalidad para un país dado se calculan no sólo basándose en su propia historia de mortalidad, sino también en la de países con estructuras demográficas semejantes y relacionados con éste.

Los modelos jerárquicos han sido en general usados bajo el enfoque bayesiano. No obstante, este enfoque tiene la limitación de que es necesario que el analista determine las distribuciones a priori de todos los parámetros e hiperparámetros del modelo, lo cual difícilmente sea posible de conseguir sin la introducción de un componente de subjetividad en el modelo. La metodología *data cloning* es una alternativa para tratar esta limitación y permite obtener estimaciones de máxima verosimilitud en un contexto jerárquico, que son invariantes a las distribuciones a priori que se elijan. Si bien esta metodología ha sido aplicada principalmente en el campo de la ecología, y recientemente en el de las finanzas, es la primera que vez que es aplicada en el campo actuarial.

Se ha trabajado con datos de mortalidad masculina de Francia, Italia, Portugal y España. Con el fin de validar la capacidad proyectiva, la muestra ha sido dividida en una muestra de entrenamiento y otra de validación. La primera se utilizó para estimar los parámetros y proyectar la mortalidad y la segunda para contrastar estos resultados con los verdaderos valores observados. Se puede concluir, mediante intervalos de predicción al 95%, que los modelos son capaces de proyectar satisfactoriamente las tasas centrales de mortalidad.

Puesto que hoy en día uno de los principales problemas a los que se están enfrentando las compañías de seguros de vida y las agencias nacionales de la Seguridad Social es la proyección y calibración de tablas de mortalidad dinámicas, las metodologías presentadas en este capítulo se proponen para ser aplicadas en los sistemas de jubilaciones y pensiones, sean éstos privados o públicos.

Capítulo 3

Proyección de la Mortalidad utilizando técnicas de *Model Assembling*

3.1 Introducción

Existen diversos trabajos en la literatura que llevan a cabo revisiones y comparaciones entre modelos estocásticos de mortalidad (ver Haberman and Renshaw (2011), Booth and Tickle (2008), Cairns et al. (2009) y Cairns et al. (2011)). De este modo, se plantea de forma natural en la práctica el problema de elegir entre varios posibles modelos.

En general, en la práctica estadística, el proceso de selección de modelos consiste en la identificación de cuál es el *mejor* de ellos de acuerdo con algún criterio de selección basado en algún criterio de información. Como resultado, los analistas se quedan con dicho *mejor* modelo, que se suele tratar como si fuera el *verdadero* y se procede como si el modelo seleccionado hubiera generado los datos y se utiliza para hacer inferencias. Mientras tanto, los modelos alternativos quedan descartados. Como una crítica a esta

forma de proceder, algunos autores plantean que “la práctica estadística estándar ignora la incertidumbre de modelos (*model uncertainty*)” (ver Hoeting et al. (1999)).

El hecho de que este tipo de incertidumbre sea ignorada en el proceso de selección de modelos, se traduce en una subestimación de la incertidumbre de las inferencias (ver Draper (1995)), lo que conduce a un exceso de confianza en las inferencias que se hacen y a decisiones que conllevan más riesgo del que se cree. Por tanto, es necesario que además de la incertidumbre asociada a los parámetros del modelo, también se tenga en cuenta la incertidumbre asociada a la selección del modelo.

Una manera de hacer frente a las dificultades anteriores es trabajar con varios modelos, promediarlos y obtener un modelo final que tenga en cuenta a todos. De esta manera, los modelos individuales actúan como componentes que se combinan linealmente para obtener un nuevo modelo final ensamblado. Así, las técnicas de *model assembling* resuelven el problema de tener que elegir un modelo concreto que podría ser mejorable.

Las técnicas de selección de modelos pueden ser vistas como casos particulares de *model assembling* cuando el peso del modelo elegido es igual a 1, y el de los demás igual a 0. Es decir, las técnicas de selección de modelos son casos extremos de casos más generales como son los de *model assembling*. Estas técnicas presentan ciertas ventajas sobre las de selección de modelos. Los promedios tienen en cuenta la incertidumbre y producen inferencias más precisas y realistas (ver Hoeting et al. (1999)). Como alternativa a los métodos de *model assembling*, recientemente Fung et al. () unificaron varios modelos de mortalidad en términos de modelos espacio-estado, incluyendo a su vez heterocedasticidad y volatilidad estocástica en el efecto periodo.

En cuanto a los enfoques clásico y bayesiano, existen diferentes propuestas que tratan de conseguir ensambles de modelos bajo determinados criterios basados en criterios de información. Por un lado, con respecto al enfoque clásico, se puede usar un método basado en el criterio de información de Akaike (AIC) (ver Buckland et al. (1997)). Por otro lado, con respecto al enfoque bayesiano, se puede usar la técnica de *Bayesian Model*

Averaging (BMA) propuesta por Hoeting et al. (1998).

Ambos enfoques han sido ampliamente utilizados en diversas áreas. El primero ha sido aplicado en campos como ecología (ver Cade (2015)), medicina (ver Schorning et al. (2016)) o finanzas (ver Liu and Kuo (2016)). En tanto que el BMA también ha sido aplicado en áreas tales como series temporales (ver Kleijn (2016)), energía (ver Culka (2016)), o administración de la salud (ver Pannullo et al. (2016)). Sin embargo, hasta donde se ha investigado, ninguno de estos dos enfoques ha sido utilizado en el campo actuarial, y esto es lo que se propone en el presente capítulo.

El presente capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la Sección 3.2 se presenta el método de *assembling* basado en el criterio de información de Akaike (AIC) y se expone su aplicación a los modelos de Lee-Carter, Renshaw-Haberman, Cairns-Blake-Dowd, y su generalización con inclusión del efecto cohorte, presentados en el Capítulo 1 para un conjunto de datos de España de la *Human Mortality Database*.

Posteriormente, en la Sección 3.3 se presenta el método de *Bayesian Model Averaging* (BMA), se plantean especificaciones bayesianas de los modelos anteriores, y se expone la aplicación del método al mismo conjunto de datos que en la Sección 3.2.

Finalmente, en la Sección 3.4 se resumen las conclusiones y consideraciones finales sobre las técnicas de *model assembling* aplicadas a modelos de proyección de mortalidad.

3.2 Enfoque clásico

En esta sección se presenta el método basado en los pesos de Akaike para obtener promedios de modelos, que se ha utilizado para proyectar mortalidad, trabajando con datos de mortalidad masculina de España.

3.2.1 Método de los pesos de Akaike

El criterio de información de Akaike (AIC) (Akaike 1974) es un criterio clásico para comparar modelos, dada una muestra. En este criterio se asigna una medida a cada modelo que considera tanto su verosimilitud como la cantidad de parámetros que tiene. En cierto modo, se trata de encontrar un *trade-off* entre la bondad de ajuste del modelo y su complejidad. De este modo, se tiene en cuenta el *principio de máxima parsimonia* o de la *navaja de Occam* y se proporciona una herramienta útil para la selección de modelos (ver Burnham and Anderson (2003)).

Sea L el máximo valor de la función de verosimilitud de un modelo y sea k el número de parámetros estimados en el modelo. El valor del AIC del modelo se define como:

$$AIC = -2 \log(L) + 2k.$$

De manera alternativa, dada una muestra con n observaciones, el AIC se puede calcular a partir de la suma de cuadrados residual (RSS) como

$$AIC = n \log \left(\frac{RSS}{n} \right) + 2k.$$

Por otro lado, cuando los tamaños muestrales son pequeños se puede añadir un factor de corrección al AIC :

$$AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}.$$

Cuando el tamaño muestral n se incrementa más rápidamente que el número de parámetros k , el factor de corrección disminuye y se torna despreciable para tamaños muestrales grandes.

El método de *model assembling* basado en el criterio de información de Akaike, consiste en el cálculo de una media ponderada según los valores de AIC_c de los resultados obtenidos por un conjunto de modelos. Para determinar los pesos correspondientes de cada modelo, es necesario identificar cuál es el *mejor modelo*, entendiendo por tal aquél que presenta el menor valor de AIC_c .

Posteriormente, se calcula la diferencia entre el AIC_c de cada modelo y de este *mejor modelo*:

$$\delta_i = AIC_c(i) - AIC_c(\text{mejor}).$$

Se puede demostrar que la función de verosimilitud asociada a un modelo es proporcional a $\exp\left(\frac{1}{2}\delta_i\right)$ (ver Burnham and Anderson (2003)), expresión conocida como la *verosimilitud relativa* del modelo dados los datos.

Un enfoque alternativo que se puede plantear es trabajar con los valores δ_i reescalados (ver Burnham and Anderson (2003)):

$$\delta_i = \frac{AIC_c(i) - AIC_c(\text{mejor})}{AIC_c(\text{mejor})}.$$

Finalmente, normalizando las verosimilitudes relativas, el *peso de Akaike* para el modelo i se obtiene como

$$w_i = \frac{e^{\frac{1}{2}\delta_i}}{\sum_{j=1}^M e^{\frac{1}{2}\delta_j}},$$

donde M es el número de modelos propuestos.

Así, w_i define el peso relativo del modelo i , dados tanto los datos como los modelos propuestos.

3.2.2 Especificación del modelo

El modelo propuesto en esta sección es un *model assembling* por medio del método basado en los pesos de Akaike de los modelos LC, RH, CBD y M6 presentados en el Capítulo 1.

En la Tabla 3.1 se resumen las especificaciones de los cuatro modelos considerados.

Modelo	Especificación	Series latentes
LC	$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$	$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \theta + \omega_t$
RH	$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \beta_x^{[1]} \kappa_t + \beta_x^{[2]} \gamma_{t-x}$	$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \theta_1 + \omega_{1t}$ $\gamma_t = \gamma_{t-1} + \theta_2 + \omega_{2t}$
CBD	$\log \left[\frac{q_x(t)}{1-q_x(t)} \right] = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x$	$\kappa_t^{[1]} = \kappa_{t-1}^{[1]} + \theta_1 + \omega_{1t}$ $\kappa_t^{[2]} = \kappa_{t-1}^{[2]} + \theta_2 + \omega_{2t}$
M6	$\log \left[\frac{q_x(t)}{1-q_x(t)} \right] = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x + \gamma_{t-x}$	$\kappa_t^{[1]} = \kappa_{t-1}^{[1]} + \theta_1 + \omega_{1t}$ $\kappa_t^{[2]} = \kappa_{t-1}^{[2]} + \theta_2 + \omega_{2t}$ $\gamma_t = \gamma_{t-1} + \theta_3 + \omega_{3t}$

Tabla 3.1: Especificaciones de los modelos LC, RH, CBD y M6.

Para pasar de las probabilidades de fallecimiento $q_x(t)$ a las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$ se ha trabajado con el supuesto de μ constante explicado en el Capítulo 1. Es decir,

$$m_x(t) = -\log (1 - q_x(t)) .$$

Posteriormente, las tasas centrales de mortalidad proyectadas $\hat{m}_x(t)$ se obtienen mediante la combinación lineal

$$\hat{m}_x(t) = \sum_i w_i \hat{m}_x^{(i)}(t),$$

donde $\hat{m}_x^{(i)}(t)$ representa la tasa central de mortalidad para la edad x en el año t y según el modelo i , en tanto que w_i es el peso que la metodología asigna al modelo i .

3.2.3 Aplicación del método de los pesos de Akaike

En esta sección se aplica la técnica de *model assembling* basada en el AIC al conjunto de modelos de proyección de la mortalidad seleccionado, esto es, a los modelos LC, RH, CBD y M6. Hasta donde se ha investigado, ésta es la primera vez en la que esta metodología es aplicada a este tipo de modelos.

Al igual que en el Capítulo 2, se ha trabajado con datos de mortalidad masculina de España que se encuentran en la *Human Mortality Database*, entre los años calendario 1960 y 2009, y edades comprendidas entre los 60 y los 100 años.

En primer lugar, se han estimado los modelos LC, RH, CBD y M6 con una muestra de entrenamiento consistente en datos recogidos desde el año 1960 hasta 1999, y luego se han obtenido proyecciones para el periodo que va desde los años 2000 hasta 2009. Los modelos han sido ajustados utilizando los paquetes **demography** (Hyndman et al. (2014)) y **StMoMo** (Villegas et al. (2015)) de R (R Core Team (2015)).

En las Tablas 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 se muestran los intervalos de predicción al 95% de confianza para las tasas centrales de mortalidad según los modelos LC, RH, CBD y M6, respectivamente, y los correspondientes valores observados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 en los 10 años correspondientes a la muestra de validación.

Puede observarse que las proyecciones del modelo LC resultan sesgadas. En concreto, las proyecciones sobreestiman la mortalidad, excepto en algunos casos de la edad $x = 100$. Así, para las edades seleccionadas, sólo el 16% de los intervalos de predicción contienen a los valores realmente observados.

En cuanto al modelo RH, el 100% los intervalos de predicción del modelo RH contienen a los valores observados. No obstante, la amplitud de los intervalos crece notablemente conforme se avanza en las edades, ofreciendo una precisión muy escasa.

Por su parte, en el modelo CBD la tasa de acierto es del 22% y, contrariamente a lo que

ocurre con el modelo LC, la mayor parte de los intervalos que contienen a los verdaderos valores observados están en general en las edades jóvenes.

Por otro lado, el modelo M6 presenta una tasa de acierto del 32% no encontrándose un comportamiento tan claro en la distribución de los intervalos que contienen los verdaderos valores observados.

t	x=60			x=70			x=80		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0119	0,0126	0,0107	0,029	0,0306	0,0266	0,0796	0,0838	0,0775
2001	0,0118	0,0125	0,0105	0,0287	0,0303	0,0269	0,0786	0,0829	0,0716
2002	0,0117	0,0124	0,0105	0,0283	0,0299	0,0253	0,0777	0,082	0,0722
2003	0,0116	0,0123	0,0107	0,0279	0,0296	0,0255	0,0768	0,0812	0,0729
2004	0,0114	0,0122	0,01	0,0275	0,0292	0,024	0,0759	0,0804	0,0701
2005	0,0113	0,012	0,0102	0,0272	0,0289	0,0235	0,075	0,0796	0,0734
2006	0,0112	0,0119	0,0102	0,0268	0,0286	0,0223	0,0741	0,0788	0,0643
2007	0,0111	0,0118	0,0098	0,0265	0,0282	0,0228	0,0732	0,078	0,0661
2008	0,0109	0,0117	0,0099	0,0261	0,0279	0,0217	0,0724	0,0771	0,0629
2009	0,0108	0,0116	0,009	0,0258	0,0276	0,0209	0,0716	0,0763	0,0617

t	x=90			x=100		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,2122	0,2213	0,2033	0,4506	0,4676	0,4597
2001	0,2106	0,2199	0,2032	0,4492	0,4667	0,4576
2002	0,209	0,2185	0,1974	0,4478	0,4659	0,4551
2003	0,2073	0,217	0,2187	0,4464	0,4649	0,4818
2004	0,2057	0,2156	0,1982	0,445	0,4641	0,4567
2005	0,2041	0,2142	0,2028	0,4437	0,4633	0,4662
2006	0,2025	0,2127	0,1896	0,4422	0,4625	0,4473
2007	0,2009	0,2113	0,1935	0,4407	0,4616	0,4503
2008	0,1993	0,2099	0,1924	0,4392	0,4608	0,4516
2009	0,1977	0,2085	0,1837	0,4378	0,4599	0,4414

Tabla 3.2: Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$: Modelo LC.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor
	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real
2000	0,0107	0,0142	0,0107	0,0245	0,034	0,0266	0,0677	0,101	0,0775
2001	0,0103	0,016	0,0105	0,021	0,0407	0,0269	0,0549	0,1237	0,0716
2002	0,0096	0,0183	0,0105	0,0176	0,048	0,0253	0,046	0,1586	0,0722
2003	0,0089	0,0209	0,0107	0,0152	0,0586	0,0255	0,0373	0,2005	0,0729
2004	0,0083	0,0241	0,01	0,0124	0,0705	0,024	0,0305	0,2585	0,0701
2005	0,0077	0,0274	0,0102	0,0105	0,0863	0,0235	0,0245	0,3338	0,0734
2006	0,0072	0,0314	0,0102	0,0089	0,1081	0,0223	0,0194	0,4292	0,0643
2007	0,0067	0,0359	0,0098	0,0077	0,1373	0,0228	0,0158	0,5803	0,0661
2008	0,0062	0,0407	0,0099	0,0066	0,1707	0,0217	0,0124	0,7558	0,0629
2009	0,0058	0,0461	0,009	0,0056	0,216	0,0209	0,0099	1	0,0617

	x=90			x=100		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor
	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real
2000	0,1761	0,2892	0,2033	0,391	0,7267	0,4597
2001	0,1389	0,3818	0,2032	0,295	1	0,4576
2002	0,1081	0,5095	0,1974	0,2202	1	0,4551
2003	0,0855	0,6953	0,2187	0,1692	1	0,4818
2004	0,0664	0,9551	0,1982	0,126	1	0,4567
2005	0,0516	1	0,2028	0,0926	1	0,4662
2006	0,0391	1	0,1896	0,0681	1	0,4473
2007	0,0301	1	0,1935	0,0495	1	0,4503
2008	0,0229	1	0,1924	0,0353	1	0,4516
2009	0,0171	1	0,1837	0,0254	1	0,4414

Tabla 3.3: Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$: Modelo RH.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0096	0,0109	0,0107	0,0276	0,0298	0,0266	0,0772	0,0809	0,0775
2001	0,0094	0,0108	0,0105	0,0271	0,0295	0,0269	0,0763	0,0802	0,0716
2002	0,0093	0,0106	0,0105	0,0267	0,0291	0,0253	0,0755	0,0794	0,0722
2003	0,0091	0,0104	0,0107	0,0263	0,0287	0,0255	0,0747	0,0787	0,0729
2004	0,0089	0,0103	0,01	0,0259	0,0284	0,024	0,0739	0,0779	0,0701
2005	0,0087	0,0101	0,0102	0,0255	0,028	0,0235	0,0731	0,0772	0,0734
2006	0,0086	0,0099	0,0102	0,0252	0,0276	0,0223	0,0724	0,0765	0,0643
2007	0,0084	0,0098	0,0098	0,0248	0,0273	0,0228	0,0716	0,0757	0,0661
2008	0,0082	0,0096	0,0099	0,0244	0,027	0,0217	0,0708	0,075	0,0629
2009	0,0081	0,0095	0,009	0,0241	0,0266	0,0209	0,07	0,0743	0,0617

	x=90			x=100		
t real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,2038	0,2144	0,2033	0,4871	0,5243	0,4597
2001	0,2026	0,2132	0,2032	0,4853	0,5234	0,4576
2002	0,2011	0,2121	0,1974	0,4836	0,5227	0,4551
2003	0,1998	0,2109	0,2187	0,4817	0,5219	0,4818
2004	0,1984	0,2098	0,1982	0,4798	0,5212	0,4567
2005	0,1971	0,2086	0,2028	0,4778	0,5206	0,4662
2006	0,1957	0,2075	0,1896	0,4761	0,52	0,4473
2007	0,1945	0,2065	0,1935	0,474	0,5193	0,4503
2008	0,1932	0,2054	0,1924	0,4723	0,5185	0,4516
2009	0,1918	0,2044	0,1837	0,4706	0,518	0,4414

Tabla 3.4: Intervalos de predicción al 95% de confianza por modelo y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$ Modelo CBD.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor
	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real
2000	0,0094	0,011	0,0107	0,027	0,0305	0,0266	0,0762	0,082	0,0775
2001	0,0093	0,0108	0,0105	0,0267	0,03	0,0269	0,0751	0,0813	0,0716
2002	0,0091	0,0107	0,0105	0,0262	0,0297	0,0253	0,0742	0,0808	0,0722
2003	0,0089	0,0105	0,0107	0,0259	0,0293	0,0255	0,0732	0,0799	0,0729
2004	0,0087	0,0103	0,01	0,0254	0,0291	0,024	0,0726	0,0791	0,0701
2005	0,0086	0,0102	0,0102	0,0248	0,0286	0,0235	0,0718	0,0787	0,0734
2006	0,0084	0,01	0,0102	0,0243	0,0284	0,0223	0,0711	0,0778	0,0643
2007	0,0082	0,0098	0,0098	0,0244	0,0275	0,0228	0,07	0,0772	0,0661
2008	0,0081	0,0097	0,0099	0,0239	0,0273	0,0217	0,0694	0,0763	0,0629
2009	0,0079	0,0095	0,009	0,0236	0,0269	0,0209	0,0686	0,0754	0,0617

	x=90			x=100		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor	Interv. Predicc. 95%		Valor
	Lím. inf.	Lím. sup.	real	Lím. inf.	Lím. sup.	real
2000	0,2016	0,216	0,2033	0,4853	0,5257	0,4597
2001	0,2006	0,2154	0,2032	0,4813	0,5237	0,4576
2002	0,1993	0,2135	0,1974	0,4811	0,5243	0,4551
2003	0,1977	0,2122	0,2187	0,479	0,524	0,4818
2004	0,1964	0,2113	0,1982	0,4772	0,5227	0,4567
2005	0,1951	0,2105	0,2028	0,4751	0,5215	0,4662
2006	0,1937	0,2097	0,1896	0,4738	0,5208	0,4473
2007	0,192	0,2085	0,1935	0,4712	0,5215	0,4503
2008	0,1901	0,2075	0,1924	0,4701	0,5202	0,4516
2009	0,1896	0,2066	0,1837	0,4682	0,5205	0,4414

Tabla 3.5: Intervalos de predicción al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$: Modelo M6.

En la Tabla 3.6 se muestran los valores del AIC_c , los valores reescalados y los pesos de cada modelo.

Modelo	AIC_c	δ_i	w_i
LC	1318,552	0,026122	0,256712
RH	1497,384	0,165292	0,239456
CBD	1284,986	0,000000	0,260087
M6	1451,768	0,129793	0,243744

Tabla 3.6: Valores AIC_c y pesos de los modelos.

Con el propósito de validar la capacidad proyectiva del modelo ponderado se han realizado proyecciones de las tasas centrales de mortalidad para el periodo 2000 a 2009 y se han comparado con los valores observados.

Las tasas centrales de mortalidad ponderadas por modelo se han calculado como

$$\hat{m}_x(t) = \sum_i w_i \hat{m}_x^{(i)}(t),$$

donde $\hat{m}_x^{(i)}(t)$ representa la tasa central de mortalidad para la edad x en el año t y bajo el modelo i .

Por otro lado, las varianzas de las predicciones son

$$\text{Var}(\hat{m}_x(t)) = \sum_i w_i^2 \text{Var}(\hat{m}_x^{(i)}(t)) + \sum_{i \neq j} w_i w_j \text{Cov}(\hat{m}_x^{(i)}(t), \hat{m}_x^{(j)}(t)),$$

las cuales no son fáciles de determinar, puesto que incluyen covarianzas de las tasas centrales de mortalidad proyectadas obtenidas según diferentes modelos. Si bien se puede establecer una cota superior (ver Buckland et al. (1997)),

$$\text{Var}(\hat{m}_x(t)) \leq \left[\sum_i w_i \sqrt{\text{Var}(\hat{m}_x^{(i)}(t))} \right]^2,$$

la expresión exacta de la varianza no tiene una forma cerrada.

Una alternativa para obtener valores estimados de la variabilidad de los estimadores es recurrir a técnicas de remuestreo.

El remuestreo *bootstrap* fue presentado por Efron (1979) como una alternativa a la técnica *jackknife* (ver Quenouille (1956)), y consiste en el remuestreo con reemplazamiento de una muestra original de observaciones que se usa para obtener aproximaciones de errores estándar e intervalos de confianza de estimadores.

Hay una importante cantidad de artículos en el campo actuarial y en demografía en los que se utiliza el *bootstrap*, tales como: Koissi et al. (2006), que aplicaron métodos *bootstrap* para predicción de esperanzas de vida bajo modelos de Lee-Carter; England and Verrall (1999) que los aplicaron para predicción de errores en reservas de siniestros; Hoedemakers et al. (2003) para estimar intervalos de confianza en reservas de siniestros; o Caswell (2001) que presentó una descripción de métodos de remuestreo para construir intervalos de confianza relacionados con estimaciones demográficas.

Existen varios métodos para determinar intervalos de confianza *bootstrap*. En este caso se han utilizado intervalos *bootstrap* basados en percentiles, puesto que éstos muestran buenas propiedades a la vez de que su cálculo es sencillo sin que sea necesario asumir ningún modelo paramétrico.

A continuación se presentan las ideas básicas acerca del *bootstrap* de residuos para estimar intervalos de confianza de las tasas centrales de mortalidad proyectadas $\hat{m}_x(t)$ obtenidas mediante *model assembling*.

El procedimiento *bootstrap* aplicado se resume en los siguientes pasos:

Paso 1 Se ha dividido la base de datos original en dos muestras: una muestra de entrenamiento con los datos de los años calendario $t = 1960, \dots, 1999$ y una muestra de validación con los datos de los años calendario $t = 2000, \dots, 2009$.

Paso 2: Con la muestra de entrenamiento, se han obtenido estimaciones de los pará-

metros de cada modelo. Luego, para cada modelo, se ha obtenido una matriz de residuos R .

Paso 3: Se generaron N (en particular se ha tomado $N = 1000$) réplicas $R^{(n)}, n = 1, \dots, N$, tomando muestras con reemplazamiento de los elementos de la matriz R . Luego, se ha replicado N veces la matriz de datos original, y a cada réplica se ha añadido una matriz de residuos $R^{(n)}, n = 1, \dots, N$, obteniendo así N muestras *bootstrap*.

Paso 4: Se determinó $\hat{m}_x^{(n)}(t) = \sum_i w_i \hat{m}_x^{(i)(n)}(t)$ para cada edad $x = 60, \dots, 100$, cada año calendario $t = 2000, \dots, 2009$ y $n = 1, \dots, N$.

Paso 5: Finalmente, se estimaron los intervalos de predicción para las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$ mediante la determinación de los percentiles correspondientes a un determinado nivel de confianza. En particular, se obtuvieron intervalos de predicción al 95% de confianza tomándose los percentiles 2,5 y 97,5 de la distribución muestral de $\hat{m}_x^{(n)}(t)$ para cada edad $x = 60, \dots, 100$ y cada año calendario $t = 2000, \dots, 2009$.

En la Tabla 3.7, se muestran los intervalos de predicción *bootstrap* al 95% de confianza, para las tasas centrales de mortalidad ponderadas y los correspondientes valores observados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 en los 10 años de la muestra de validación. Se puede observar que el modelo promediado presenta intervalos angostos, y que los verdaderos valores están contenidos dentro de los intervalos en el 90% de los casos, lo cual da cuenta de una proyección con menor sesgo y mayor precisión que la que se había obtenido con los modelos individualmente considerados.

Por su parte, para una visualización gráfica, en la figura 3.1 están representadas las bandas de predicción al 95% de confianza y las trayectorias de mortalidad observadas para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 . Como se puede apreciar, las bandas de

predicción generadas a partir de la muestra de entrenamiento contienen a las trayectorias de mortalidad observadas en la muestra de validación.

t	x=60			x=70			x=80		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0108	0,0117	0,0107	0,0277	0,0303	0,0266	0,0767	0,0847	0,0775
2001	0,0105	0,0118	0,0105	0,0266	0,0312	0,0269	0,0724	0,0883	0,0716
2002	0,0102	0,012	0,0105	0,0252	0,0321	0,0253	0,0686	0,0928	0,0722
2003	0,0099	0,0123	0,0107	0,0241	0,0334	0,0255	0,0649	0,0974	0,0729
2004	0,0097	0,0126	0,01	0,0228	0,0345	0,024	0,0614	0,1025	0,0701
2005	0,0094	0,0128	0,0102	0,0215	0,036	0,0235	0,0578	0,1085	0,0734
2006	0,0091	0,0131	0,0102	0,0205	0,0375	0,0223	0,0544	0,1139	0,0643
2007	0,0089	0,0134	0,0098	0,0195	0,0392	0,0228	0,0514	0,1212	0,0661
2008	0,0087	0,0136	0,0099	0,0186	0,0409	0,0217	0,0482	0,128	0,0629
2009	0,0085	0,0139	0,009	0,0177	0,0427	0,0209	0,0452	0,1372	0,0617

t	x=90			x=100		
	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,2018	0,2285	0,2033	0,4626	0,5388	0,4597
2001	0,19	0,2435	0,2032	0,4305	0,5865	0,4576
2002	0,1782	0,2601	0,1974	0,4008	0,6377	0,4551
2003	0,1677	0,2788	0,2187	0,3746	0,7065	0,4818
2004	0,1573	0,2994	0,1982	0,3477	0,7778	0,4567
2005	0,1475	0,3223	0,2028	0,3233	0,8603	0,4662
2006	0,1365	0,3458	0,1896	0,2987	0,9553	0,4473
2007	0,1276	0,3764	0,1935	0,278	1	0,4503
2008	0,1194	0,4056	0,1924	0,2562	1	0,4516
2009	0,1107	0,4423	0,1837	0,2364	1	0,4414

Tabla 3.7: Intervalos de predicción *bootstrap* al 95% de confianza y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$.

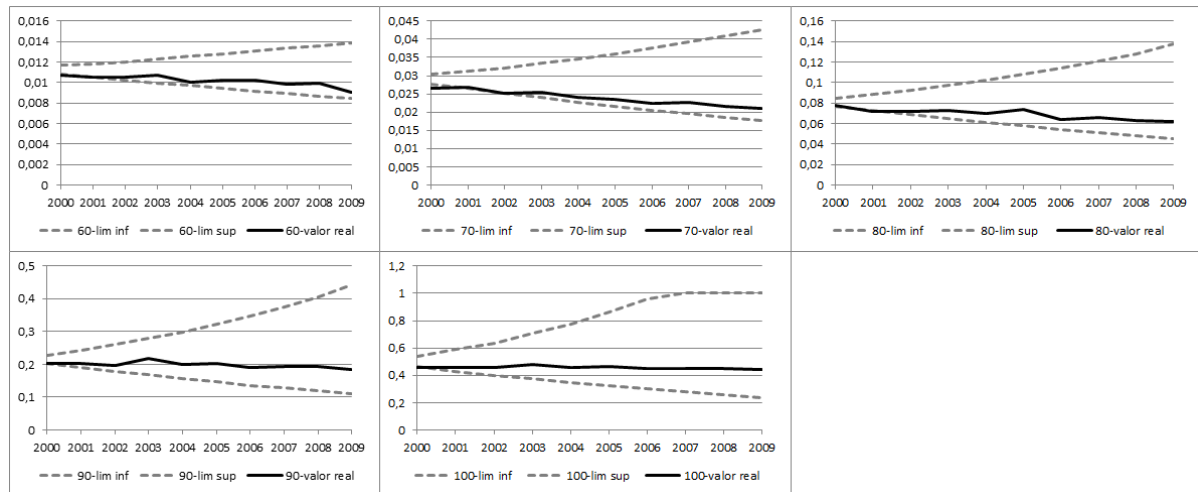


Figura 3.1: Bandas de predicción al 95% de confianza y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$.

Proyección de la mortalidad a largo plazo

Una vez evaluada la capacidad proyectiva del *model assembling* con el método basado en el AIC, se completa el análisis mediante la proyección de la mejora en la mortalidad a largo plazo.

Se estimaron los modelos trabajando con los datos de mortalidad masculina de España entre 1960 y 2009. En la Tabla 3.8 se muestran valores del AIC_c , los valores reescalados y los pesos de cada modelo.

Model	AIC_c	δ_i	w_i
LC	1566,115	0,000000	0,257887
RH	1764,097	0,126415	0,242091
CBD	1570,151	0,002576	0,257555
M6	1759,245	0,123317	0,242466

Tabla 3.8: Valores AIC_c y pesos de los modelos.

Se obtuvieron proyecciones con cada uno de los modelos y, aplicando los pesos w_i , se obtuvieron las proyecciones promediadas.

En la Figura 3.2 se representa la superficie de mortalidad observada $m_x(t)$ para los años

$t = 2000, \dots, 2009$ seguida de la superficie de mortalidad proyectada $\hat{m}_x(t)$ para los años $t = 2010, \dots, 2029$ de acuerdo con el método de los pesos de Akaike. Como se puede apreciar, es de esperar una mejora de la mortalidad para las próximas décadas.

Asimismo, para mayor detalle, en la Tabla 3.9 se exponen los valores de los perfiles de mortalidad proyectados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 , en los años $t = 2010, \dots, 2029$. Los resultados sugieren una disminución significativa de las tasas de mortalidad.

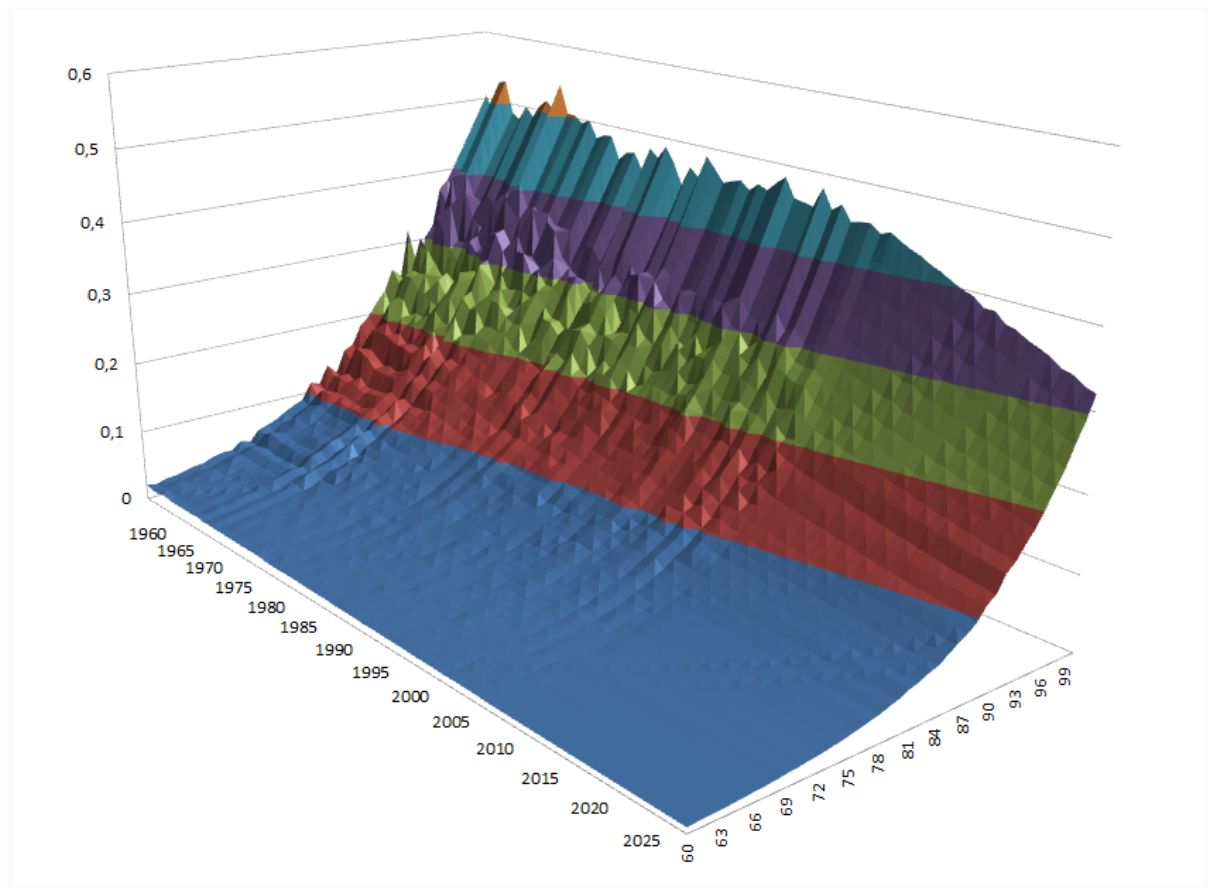


Figura 3.2: Superficie de mortalidad real y proyectada: método de los pesos de Akaike.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
60	0,0088	0,0087	0,0087	0,0086	0,0085	0,0085	0,0084	0,0083	0,0082	0,0082
70	0,0213	0,0205	0,0198	0,0201	0,0197	0,0192	0,0194	0,0193	0,0191	0,0189
80	0,0606	0,0598	0,0578	0,0572	0,0556	0,0542	0,0534	0,0524	0,0515	0,0505
90	0,1803	0,1741	0,1722	0,1681	0,1653	0,1621	0,1570	0,1553	0,1507	0,1482
100	0,4465	0,4383	0,4318	0,4268	0,4188	0,4134	0,4057	0,3992	0,3950	0,3839
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
60	0,0081	0,0080	0,0080	0,0079	0,0078	0,0078	0,0077	0,0076	0,0076	0,0075
70	0,0187	0,0185	0,0182	0,0180	0,0178	0,0176	0,0174	0,0173	0,0171	0,0169
80	0,0499	0,0479	0,0463	0,0469	0,0459	0,0448	0,0453	0,0448	0,0444	0,0439
90	0,1439	0,1420	0,1376	0,1361	0,1324	0,1293	0,1275	0,1251	0,1230	0,1208
100	0,3842	0,3719	0,3684	0,3603	0,3549	0,3486	0,3385	0,3353	0,3258	0,3210

Tabla 3.9: Perfiles de mortalidad proyectados: método de los pesos de Akaike.

3.3 Enfoque bayesiano

Como alternativa al análisis clásico se plantea una propuesta bayesiana. El método con el que se ha trabajado se conoce como *Bayesian model averaging (BMA)* y se ha aplicado al mismo conjunto de modelos y al mismo conjunto de datos que en la Sección 3.2.

3.3.1 *Bayesian model averaging* (BMA)

Bayesian model averaging es una metodología bayesiana que realiza inferencias mediante promedios en el espacio de los posibles modelos. Con esta metodología se contempla la incertidumbre de los modelos tanto en la estimación de los parámetros como en el cómputo de las predicciones (para una introducción al tema ver Hoeting et al. (1999) y Hoeting (2002)).

Sea $\mathcal{M} = (M_1, \dots, M_K)$ el conjunto de modelos que se tiene en consideración. Si Δ es una cantidad de interés, como puede ser un vector de parámetros o bien los futuros valores de una variable de interés, la distribución a posteriori de Δ dados los datos X es

$$P(\Delta|X) = \sum_{k=1}^K P(\Delta|X, M_k)P(M_k|X).$$

Esta expresión equivale a un promedio de la distribución predictiva a posteriori de Δ en cada uno de los modelos en consideración ponderados por las correspondientes probabilidades a posteriori de cada modelo. La probabilidad a posteriori de cada modelo M_k dados los datos está dada por la expresión

$$P(M_k|X) \propto P(X|M_k)P(M_k)$$

donde

$$P(X|M_k) = \int \cdots \int P(X|\theta_k, M_k)P(\theta_k|M_k)d\theta_k$$

es la verosimilitud integrada del modelo M_k , θ_k es el vector de parámetros del modelo M_k , $P(\theta_k|M_k)$ es la función de densidad conjunta a priori de los parámetros del modelo M_k , $P(X|\theta_k, M_k)$ es la función de verosimilitud, y $P(M_k)$ es la probabilidad a priori de que el modelo M_k sea el *verdadero*. Todas las probabilidades se asume que están condicionadas a \mathcal{M} , es decir, al conjunto de modelos que se consideran.

En la práctica, las probabilidades a posteriori de cada modelo M_k se pueden computar mediante un algoritmo MCMC (ver Chib (1995)) y para obtener las proyecciones promediadas, las proyecciones de cada modelo se ponderan por las probabilidades a posteriori.

3.3.2 Especificación del modelo

El modelo propuesto es un ensamble de los modelos LC, RH, CBD y M6 por medio del método *Bayesian model averaging*.

Antes de aplicar la metodología a la proyección de mortalidad es necesario plantear especificaciones bayesianas de los modelos LC, RH, CBD y M6. Teniendo presentes las especificaciones de los cuatro modelos (ver Tabla 3.10) se exponen a continuación las distribuciones a priori asumidas para los parámetros de cada modelo y para los pesos.

Modelo	Especificación	Series latentes
LC	$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$	$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \theta + \omega_t$
RH	$\log [m_x(t)] = \alpha_x + \beta_x^{[1]} \kappa_t + \beta_x^{[2]} \gamma_{t-x}$	$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \theta_1 + \omega_{1t}$ $\gamma_t = \gamma_{t-1} + \theta_2 + \omega_{2t}$
CBD	$\log \left[\frac{q_x(t)}{1-q_x(t)} \right] = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x$	$\kappa_t^{[1]} = \kappa_{t-1}^{[1]} + \theta_1 + \omega_{1t}$ $\kappa_t^{[2]} = \kappa_{t-1}^{[2]} + \theta_2 + \omega_{2t}$
M6	$\log \left[\frac{q_x(t)}{1-q_x(t)} \right] = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x + \gamma_{t-x}$	$\kappa_t^{[1]} = \kappa_{t-1}^{[1]} + \theta_1 + \omega_{1t}$ $\kappa_t^{[2]} = \kappa_{t-1}^{[2]} + \theta_2 + \omega_{2t}$ $\gamma_t = \gamma_{t-1} + \theta_3 + \omega_{3t}$

Tabla 3.10: Especificaciones de los modelos LC, RH, CBD y M6.

Modelo de Lee-Carter (LC)

En la versión bayesiana del modelo LC se asumen las siguientes distribuciones a priori:

$$\alpha_x \sim N(0, \sigma_\beta)$$

$$\beta_x \sim \text{Dirichlet}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$$

$$\kappa_1 \sim N(0, \sigma_\omega)$$

$$\theta \sim N(0, \sigma_\theta)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 \sim \text{InvGamma}(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\omega_t \sim N(0, \Sigma)$$

Modelo de Renshaw-Haberman (*RH*)

Por su parte, en la versión bayesiana del modelo RH se asumen las siguientes distribuciones a priori:

$$\begin{aligned}
\alpha_x &\sim N(0, \sigma_\beta) \\
\beta_x^{[1]}, \quad \beta_x^{[2]} &\sim \text{Dirichlet}(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) \\
\kappa_1 &\sim N(0, \sigma_\omega) \\
\gamma_1 &\sim N(0, \sigma_\gamma) \\
\theta_1, \quad \theta_2 &\sim N(0, \sigma_\theta) \\
\sigma_\varepsilon^2 &\sim \text{InvGamma}(\alpha_1, \alpha_2) \\
\omega_{1t} &\sim N(0, \Sigma) \\
\omega_{2t} &\sim N(0, \Sigma)
\end{aligned}$$

Modelo de Cairns-Blake-Dowd model (*CBD*)

Respecto a la versión bayesiana del modelo CBD se asumen las siguientes distribuciones a priori:

$$\begin{aligned}
\kappa_1^{[1]} &\sim N(0, \sigma_{\omega_1}) \\
\kappa_1^{[2]} &\sim N(0, \sigma_{\omega_2}) \\
\theta_1, \quad \theta_2 &\sim N(0, \sigma_\theta) \\
(\omega_{1t}, \omega_{2t})' &\sim N_2((0, 0)', \Omega) \\
\Omega &\sim \text{Wishart}(\mathbf{I}_2, 2)
\end{aligned}$$

Modelo de Cairns-Blake-Dowd con efecto cohorte (*M6*)

Finalmente, en la versión bayesiana del modelo M6 se asumen las siguientes distribuciones a priori:

$$\begin{aligned}
\kappa_1^{[1]} &\sim N(0, \sigma_{\omega_1}) \\
\kappa_1^{[2]} &\sim N(0, \sigma_{\omega_2}) \\
\gamma_1 &\sim N(0, \sigma_\gamma) \\
\theta_1, \theta_2, \theta_3 &\sim N(0, \sigma_\theta) \\
(\omega_{1t}, \omega_{2t})' &\sim N_2((0, 0)', \Omega) \\
\Omega &\sim \text{Wishart}(\mathbf{I}_2, 2) \\
\omega_{3t} &\sim N(0, \Sigma)
\end{aligned}$$

En todos los casos se han asumido en la práctica distribuciones a priori vagamente informativas, ajustando de modo correspondiente los valores de los parámetros de las distribuciones a priori.

En los modelos LC y RH, donde se ha de imponer la restricción $\sum_x \beta_x^{(j)} = 1$, se han asumido distribuciones Dirichlet para los parámetros $\beta_x^{(j)}$ de modo que se satisfaga tal restricción. Y para asumir distribuciones vagamente informativas, los parámetros de la distribución de Dirichlet se toman $\pi_j = 1$, para $j = 1, \dots, p$. Asimismo, para evitar problemas de identificabilidad se impone la restricción $\sum_t \kappa_t = 0$.

Por otro lado, para las varianzas se han asumido distribuciones gamma-inversas puesto que la distribución gamma-inversa es conjugada en el caso de parámetros de escala.

Se han elegido valores grandes de las desviaciones estándar en las distribuciones normales y en las distribuciones gamma-inversas los parámetros α_1 y α_2 han sido fijados de manera

tal que las distribuciones tengan varianzas grandes también.

En el caso de los modelos CBD y M6, cuyas especificaciones incluyen series temporales latentes bivariantes $(\omega_t^{(1)}, \omega_t^{(2)})'$, se han considerado distribuciones a priori normales bivariantes con vector de medias $(0, 0)'$, y para la matriz de varianzas y covarianzas, distribuciones Wishart con parámetros una matriz identidad \mathbf{I}_2 y 2 grados de libertad.

Respecto al ensamble de modelos, para la distribución a priori de los pesos de los modelos se ha elegido una distribución uniforme discreta con igual probabilidad para cada modelo, esto es, $P(M_i) = \frac{1}{4}$, para $i = 1, \dots, 4$.

Como comentario final, aquí también para pasar de las probabilidades de fallecimiento $q_x(t)$ a las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$ se ha trabajado con el supuesto de μ constante presentado en el Capítulo 1. Es decir,

$$m_x(t) = -\log(1 - q_x(t)).$$

3.3.3 Aplicación del BMA

Para aplicar la metodología BMA en la práctica mediante técnicas Monte Carlo de cadenas de Markov (MCMC), en este capítulo se ha usado el programa **JAGS** (Plummer et al. 2003)) que se ha ejecutado mediante el paquete **R2jags** (Su and Yajima 2015) de **R** (R Core Team (2015)). Una de las ventajas de programar un algoritmo MCMC en **JAGS** es que éste construye las distribuciones condicionales del MCMC desde la propia especificación del modelo.

Para validar la capacidad proyectiva del modelo ponderado, se han realizado proyecciones de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$ para el periodo 2000 a 2009 y se han comparado con los valores reales observados.

En la Tabla 3.11 se exponen intervalos de predicción al 95% de probabilidad y los verdaderos valores observados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 .

Por su parte, para una visualización gráfica, en la Figura 3.3 están representadas las bandas de predicción al 95% de probabilidad y las trayectorias de mortalidad observadas para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 . Como se puede apreciar, las bandas de predicción generadas a partir de la muestra de entrenamiento contienen a las trayectorias de mortalidad observadas en la muestra de validación.

	x=60			x=70			x=80		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,0105	0,0126	0,0107	0,0253	0,0313	0,0266	0,0711	0,0887	0,0775
2001	0,0101	0,0128	0,0105	0,0239	0,0319	0,0269	0,0672	0,0897	0,0716
2002	0,0098	0,013	0,0105	0,0223	0,0319	0,0253	0,0644	0,0915	0,0722
2003	0,0096	0,0132	0,0107	0,0217	0,032	0,0255	0,062	0,0921	0,0729
2004	0,0093	0,0132	0,01	0,0202	0,0319	0,024	0,0595	0,0933	0,0701
2005	0,0091	0,0132	0,0102	0,0193	0,032	0,0235	0,0573	0,0932	0,0734
2006	0,0088	0,0134	0,0102	0,0184	0,0323	0,0223	0,0543	0,0939	0,0643
2007	0,0087	0,0134	0,0098	0,0178	0,0324	0,0228	0,053	0,0955	0,0661
2008	0,0085	0,0135	0,0099	0,017	0,0325	0,0217	0,0505	0,0937	0,0629
2009	0,0081	0,0137	0,009	0,0166	0,0328	0,0209	0,0482	0,095	0,0617

	x=90			x=100		
t	Interv. Predicc. 95%		Valor real	Interv. Predicc. 95%		Valor real
	Lím. inf.	Lím. sup.		Lím. inf.	Lím. sup.	
2000	0,1955	0,2348	0,2033	0,4339	0,5153	0,4597
2001	0,189	0,2369	0,2032	0,4253	0,5117	0,4576
2002	0,1829	0,2384	0,1974	0,4098	0,5041	0,4551
2003	0,178	0,241	0,2187	0,4086	0,5153	0,4818
2004	0,1724	0,241	0,1982	0,3969	0,5143	0,4567
2005	0,1688	0,2454	0,2028	0,3914	0,5169	0,4662
2006	0,1632	0,2451	0,1896	0,3817	0,52	0,4473
2007	0,1609	0,2471	0,1935	0,3749	0,5184	0,4503
2008	0,1554	0,2483	0,1924	0,3668	0,52	0,4516
2009	0,1503	0,2498	0,1837	0,3602	0,5257	0,4414

Tabla 3.11: Intervalos de predicción al 95% de probabilidad y valores reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$.

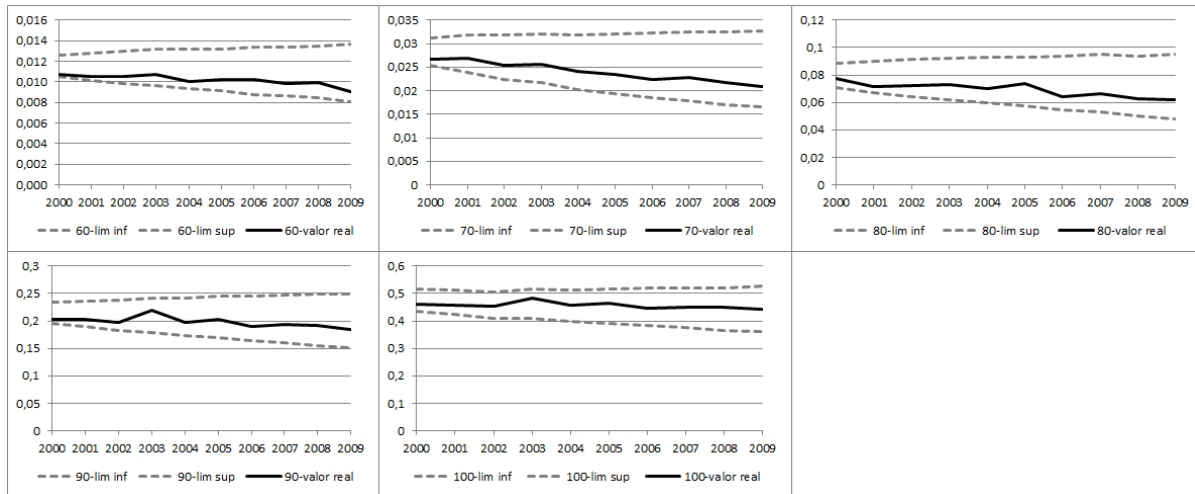


Figura 3.3: Bandas de predicción al 95% de probabilidad y trayectorias reales de las tasas centrales de mortalidad $m_x(t)$.

Proyección de la mortalidad a largo plazo

En la Figura 3.4 se representa la superficie de mortalidad observada $m_x(t)$ para los años $t = 2000, \dots, 2009$, seguida de la superficie de mortalidad proyectada $\hat{m}_x(t)$ para los años $t = 2010, \dots, 2029$ de acuerdo con la metodología *Bayesian model averaging*. Del mismo modo que en el enfoque clásico, bajo el enfoque bayesiano también se aprecia una mejora esperada de la mortalidad para las próximas décadas.

Asimismo, para mayor detalle, en la Tabla 3.12 se exponen los valores de los perfiles de mortalidad proyectados para las edades $x = 60, 70, 80, 90$ y 100 , en los años $t = 2010, \dots, 2029$. En este caso también los resultados sugieren una disminución importante de las tasas de mortalidad.

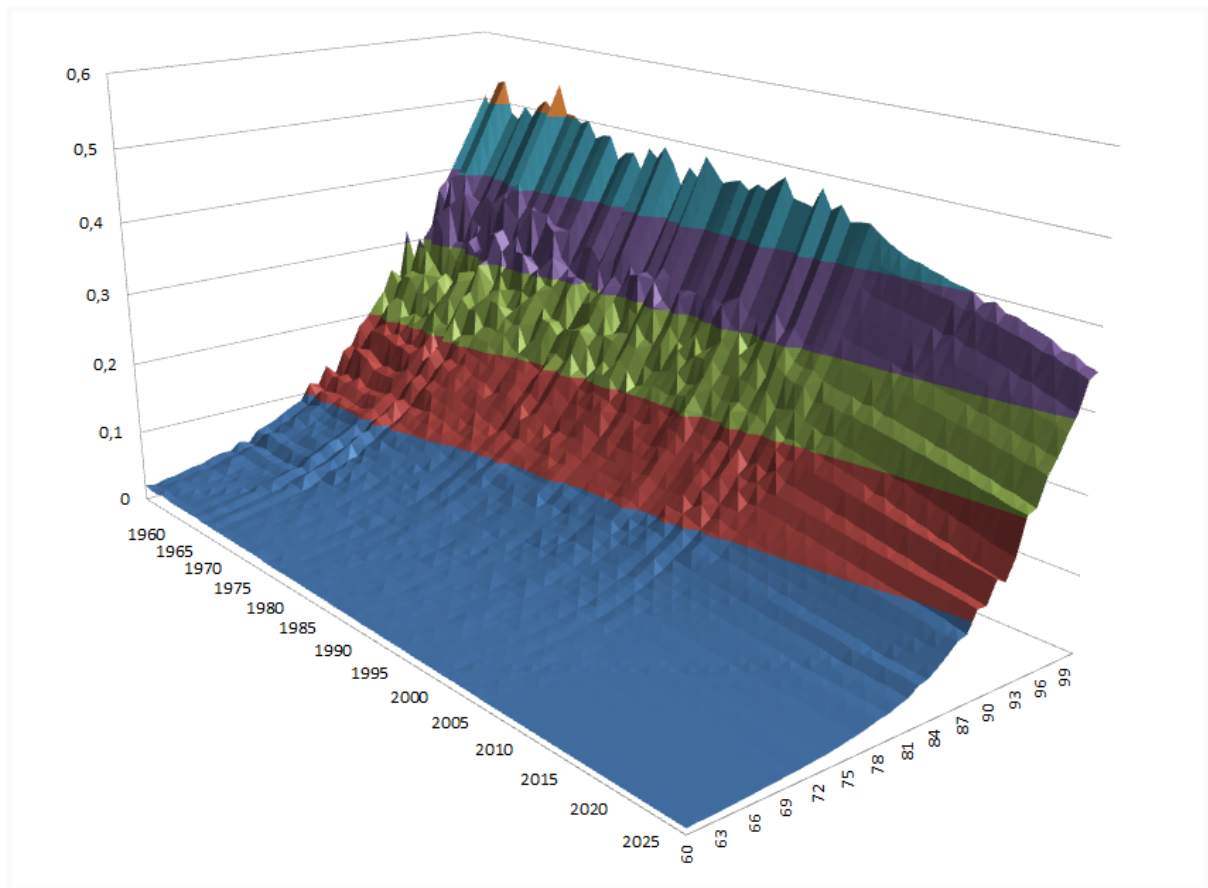


Figura 3.4: Superficie de mortalidad real y proyectada: *Bayesian model averaging*.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
60	0,0092	0,0091	0,009	0,0089	0,0088	0,0087	0,0086	0,0085	0,0084	0,0083
70	0,0206	0,0195	0,0186	0,0187	0,0183	0,0178	0,0177	0,0171	0,0168	0,0163
80	0,0598	0,0589	0,0568	0,056	0,0542	0,0525	0,0516	0,0503	0,0491	0,0478
90	0,1862	0,1823	0,1807	0,178	0,1764	0,1738	0,1705	0,169	0,1656	0,1637
100	0,433	0,4261	0,4202	0,4185	0,4135	0,4107	0,4058	0,4033	0,4005	0,391
	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
60	0,0082	0,0081	0,008	0,008	0,0079	0,0078	0,0077	0,0076	0,0075	0,0074
70	0,0161	0,0158	0,0156	0,0154	0,0152	0,015	0,0147	0,0145	0,0143	0,0142
80	0,0467	0,0442	0,0423	0,0425	0,0414	0,0403	0,0401	0,0387	0,0379	0,0369
90	0,1606	0,1588	0,1554	0,1538	0,1508	0,1481	0,1463	0,1438	0,142	0,1396
100	0,3957	0,3856	0,3844	0,3783	0,3746	0,3697	0,3606	0,3595	0,3513	0,3475

Tabla 3.12: Perfiles de mortalidad proyectados: *Bayesian model averaging*.

3.4 Consideraciones finales

En este capítulo se han presentado dos técnicas de *model assembling* con el objetivo de contemplar el problema de la incertidumbre de modelos en la proyección de la mortalidad. La primera se basa en el enfoque clásico y la segunda en el enfoque bayesiano. Si bien dichas técnicas se habían aplicado en diferentes áreas del conocimiento, es la primera vez que son aplicadas en el campo actuarial.

Se ha trabajado con datos de mortalidad de España. Y con el fin de validar la capacidad de proyección de los modelos ensamblados, se ha aplicado la misma metodología que en el Capítulo 2, es decir, se ha dividido la muestra en una de entrenamiento y otra de validación. Con la primera muestra se han estimado los parámetros de los modelos y se ha proyectado la mortalidad, en tanto que la segunda se ha utilizado para contrastar las proyecciones obtenidas con los verdaderos valores observados. Se ha podido concluir, mediante intervalos de predicción al 95%, que los modelos ensamblados son capaces de proyectar correctamente las tasas centrales de mortalidad en la gran mayoría de los casos.

Un punto importante a destacar es que tanto con la metodología clásica como con la bayesiana se han obtenido proyecciones de las tasas centrales de mortalidad con menor sesgo y más precisión que las que se obtienen con los modelos considerados individualmente sobre el mismo conjunto de datos.

Por otro lado, cabe destacar que la interpretación de los correspondientes intervalos de predicción es diferente en ambos casos. En tanto que los intervalos *bootstrap* tienen una interpretación frecuentista, los intervalos del modelo obtenido mediante *Bayesian model averaging* contemplan información a priori y su interpretación es probabilística. Si bien se ha trabajado con distribuciones a priori vagamente informativas, se podría incluir en los modelos cualquier tipo de información provista por expertos.

Por último, se han proyectado las tasas centrales de mortalidad a largo plazo utilizando ambas metodologías y se ha podido concluir que, tanto con una como con otra, se esperan

notables descensos de la mortalidad en las edades avanzadas en las próximas décadas. Esto es esencial puesto que hoy en día uno de los problemas más serios a los que se enfrentan los sistemas de previsión social está relacionado con las estimaciones erróneas de las probabilidades de supervivencia basadas en tablas de mortalidad cuya calibración es incorrecta.

Por tanto, las metodologías presentadas en este capítulo también se proponen para ser aplicadas en la gestión de los sistemas de jubilaciones y pensiones, tanto públicos como privados.

Capítulo 4

Valoración del Riesgo de Longevidad

4.1 Introducción

Las coberturas de los seguros sobre la vida de las personas constituyen operaciones financieras aleatorias de larga duración, y asociado a ellas surge la necesidad de poder hacer una valoración de las operaciones en cualquier momento del tiempo.

Las compañías de seguros deben atender a esta cuestión en sus cierres de balances, aunque también puede ser frecuente en otras tareas, por ejemplo, en aquellas relacionadas con el planeamiento y confección de presupuestos. Esto da lugar al concepto de *reservas matemáticas* o *provisiones matemáticas*.

Estas reservas técnicas surgen de la necesidad de cuantificar las obligaciones que tiene la compañía de seguros frente a sus asegurados en cualquier momento posterior a la contratación. Así, estas reservas constituyen una partida fundamental del balance general de una compañía de seguros de vida.

En este capítulo se propone hacer una valoración del impacto del riesgo de longevidad en diferentes situaciones, utilizando tablas de mortalidad proyectadas construidas con las metodologías propuestas en esta Tesis. Para ello, son necesarios ciertos conocimientos

básicos sobre cálculo actuarial, en concreto, sobre valoraciones vinculadas a la supervivencia de las personas. En la Sección 4.2 se definen los conceptos necesarios para determinar los valores actuales actuariales asociados a las rentas vitalicias. En la Sección 4.3 se ejemplifica para diferentes casos el perjuicio económico que la calibración incorrecta de las tablas de mortalidad puede ocasionar. Y en la Sección 4.4 se exponen las conclusiones y consideraciones finales.

4.2 Fundamentos de cálculo actuarial de las rentas vitalicias

En lo que sigue se utilizará la notación actuarial internacional, ampliamente extendida en la literatura (ver Bowers et al. (1997), Jordan (1991) y London (1997)).

Actualización y capitalización actuarial

Dado un grupo de l_x personas de edad x , interesa determinar qué cantidad de dinero ${}_nE_x$ debe aportar cada una de ellas en media, de modo que los supervivientes a la edad $x+n$ reciban una unidad monetaria. Si los fondos se invierten al tipo de interés anual i , se plantea la equivalencia:

$${}_nE_x \times l_x \times (1+i)^n = 1 \times l_{x+n}.$$

Despejando ${}_nE_x$:

$$\begin{aligned} {}_nE_x &= \frac{1}{(1+i)^n} \times \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= v^n \times {}_np_x, \end{aligned}$$

donde $v = \frac{1}{1+i}$.

A la expresión ${}_nE_x$ se la conoce *factor de actualización actuarial* y está compuesta por dos expresiones: v^n que actúa como *factor de actualización financiero*, y la probabilidad de supervivencia ${}_np_x$ que actúa como *factor de actualización biométrico*. Así, el factor de actualización actuarial representa el valor actual a la edad x de una unidad monetaria pagadera en caso de supervivencia a la edad $x + n$.

Desde el punto de vista de un seguro, la expresión ${}_nE_x$ puede ser considerada como la prima pura de una cobertura por supervivencia consistente en el pago de una unidad monetaria en caso de supervivencia n años. A esta cobertura se la denomina *capital diferido de vida* o *endowment*, y ${}_nE_x$ es su valor actual actuarial, esto es, el valor presente equivalente cierto.

Por su parte, si se analiza la operación inversa, el *factor de capitalización actuarial* resulta:

$${}_nE_x^{-1} = (1+i)^n \times {}_np_x^{-1},$$

y está compuesto por dos expresiones: $(1+i)^n$ que actúa como *factor de capitalización financiero*, y la inversa de la probabilidad de supervivencia ${}_np_x^{-1}$ que actúa como *factor de capitalización biométrico*. Así, el factor de capitalización actuarial representa el valor final de una unidad monetaria pagadera en caso de supervivencia a la edad $x + n$.

Expresando el factor de capitalización financiero en función del tipo de interés efectivo para n años i_n y la inversa de la probabilidad de supervivencia en función del número de personas supervivientes de una tabla de mortalidad, queda:

$${}_nE_x^{-1} = (1+i_n) \times \frac{l_x}{l_{x+n}}.$$

Sustituyendo a los l_x supervivientes a la edad x por la suma de los l_{x+n} supervivientes a

la edad $x + n$ y los ${}_n d_x$ fallecidos entre las edades x y $x + n$, el factor de capitalización actuarial queda:

$$\begin{aligned} {}_n E_x^{-1} &= (1 + i_n) \times \frac{l_{x+n} + {}_n d_x}{l_{x+n}} \\ &= (1 + i_n) \times \left(1 + \frac{{}_n d_x}{l_{x+n}} \right). \end{aligned}$$

A la expresión $\frac{{}_n d_x}{l_{x+n}}$ se la denota como ${}_n i b_x$ y se la denomina *tipo de interés biométrico*. Así,

$${}_n E_x^{-1} = (1 + i_n) \times (1 + {}_n i b_x).$$

El tipo de interés biométrico refleja la redistribución de los fondos de los fallecidos durante las edades x y $x + n$ entre los supervivientes al final de ese período de tiempo, es decir, a la edad $x + n$. Luego,

$${}_n E_x^{-1} = 1 + i_n + {}_n i b_x + i_n \times {}_n i b_x. \quad (4.1)$$

En la expresión 4.1 se observa que la capitalización actuarial arroja como resultado el fondo inicial más los intereses financieros, intereses biométricos e intereses mixtos. Y es precisamente en estos dos últimos donde el riesgo de longevidad ejerce un impacto negativo en las valoraciones actuariales en la medida en que la mortalidad efectivamente observada sea menor que la contemplada en las respectivas bases técnicas. Es decir, cuando los fondos para pagar las rentas a los supervivientes no se ven nutridos de los intereses biométricos y mixtos necesarios para alcanzar los niveles de los compromisos que los compañías de seguros asumieron previamente con sus rentistas.

Renta vitalicia individual

El valor actual actuarial de una renta vitalicia individual se denota como ${}_h|{}_n\ddot{a}_x$, donde x representa la edad del asegurado al momento de la valoración, h el diferimiento hasta el primer pago eventual y n , el plazo de cobertura. Se calcula como la suma de n capitales diferidos de vida desde la edad $x + h$ hasta la edad $x + h + n - 1$:

$${}_h|{}_n\ddot{a}_x = \sum_{t=h}^{h+n-1} {}_tE_x$$

Renta vitalicia de dos personas: supervivencia conjunta

Sea ${}_np_{x:y}$ la probabilidad de supervivencia conjunta de dos personas de edades x e y durante n años. Bajo la hipótesis de independencia, esta probabilidad es

$${}_np_{x:y} = {}_np_x {}_np_y.$$

El capital diferido de vida de dos personas consiste en el pago de una unidad monetaria a un grupo de dos personas de edades x e y en caso de supervivencia de ambos a las edades $x + n$ e $y + n$, respectivamente. El valor actual actuarial de un capital diferido de vida sobre dos personas se calcula como

$${}_nE_{x:y} = v^n {}_np_{x:y}$$

Una renta vitalicia de supervivencia conjunta consiste en el pago periódico de una renta sujeta a la supervivencia conjunta de las dos personas que conforman el grupo. El valor actual actuarial se denota como ${}_h|{}_n\ddot{a}_{x:y}$, donde x e y representan las edades de los asegurados al momento de la valoración, h el diferimiento hasta el primer pago eventual y n , el plazo de cobertura. Se calcula como la suma de n capitales diferidos de vida, el primero

de los cuales se haría efectivo h años después del momento de valoración. Es decir,

$${}_h|{}_n\ddot{a}_{x:y} = \sum_{t=h}^{h+n-1} {}_tE_{x:y}$$

Renta vitalicia sobre dos personas: último superviviente

Sea ${}_np_{\overline{x:y}}$ la probabilidad de subsistencia de un grupo de dos personas de edades x e y durante n años. En este contexto, se entiende por subsistencia a la no extinción del grupo, es decir, el grupo subsiste mientras viva al menos uno de sus integrantes. Esta probabilidad es

$${}_np_{\overline{x:y}} = {}_np_x + {}_np_y - {}_np_{x:y}.$$

Un capital diferido de vida pagadero en caso de subsistencia de un grupo consiste en el pago de una unidad monetaria dentro de n años si al menos una de las dos personas permanece con vida en dicho momento.

El valor actual actuarial, por tanto, es:

$$\begin{aligned} {}_nE_{\overline{x:y}} &= v^n {}_np_{\overline{x:y}} \\ &= v^n [{}_np_x + {}_np_y - {}_np_{x:y}] \\ &= {}_nE_x + {}_nE_y - {}_nE_{x:y} \end{aligned}$$

Una renta vitalicia de último superviviente consiste en el pago periódico de una renta sujeta a la supervivencia de al menos una de las dos personas que conforman el grupo.

El valor actual actuarial se denota como ${}_h|{}_n\ddot{a}_{\overline{x:y}}$, donde x e y representan las edades de los asegurados al momento de la valoración, h el diferimiento hasta el primer pago eventual, y n el plazo de cobertura.

Se calcula como la suma de n capitales diferidos de vida de último superviviente, el

primero de los cuales se haría efectivo h años después del momento de valoración:

$$\begin{aligned}
 {}_h|n\ddot{a}_{\overline{x:y}} &= \sum_{t=h}^{h+n-1} {}_tE_{x:y} \\
 &= \sum_{t=h}^{h+n-1} ({}_tE_x + {}_tE_y - {}_tE_{x:y}) \\
 &= {}_h|n\ddot{a}_x + {}_h|n\ddot{a}_y - {}_h|n\ddot{a}_{x:y}
 \end{aligned}$$

Renta vitalicia extensiva a un tercero

En este caso existe un beneficiario principal y en caso de fallecimiento se extiende un porcentaje de la renta vitalicia a un tercero superviviente como puede ser un cónyuge.

El valor actual actuarial de esta cobertura se denota como ${}_h|n\ddot{a}_{x \rightarrow y}$, donde x representa la edad del beneficiario principal al momento de la valoración, y la del tercero, h el diferimiento hasta el primer pago eventual, n el plazo de cobertura, y f la fracción que se extiende al tercero en caso de fallecimiento del titular. Se calcula como la suma de n capitales diferidos de vida pagaderos en caso de supervivencia del titular y, en caso de fallecimiento del mismo y supervivencia del tercero, una fracción f del beneficio pagadera al tercero mientras viva.

$$\begin{aligned}
 {}_h|n\ddot{a}_{x \rightarrow y} &= \sum_{t=h}^{h+n-1} v^t [{}_tp_x + f({}_tq_x {}_tp_y)] \\
 &= \sum_{t=h}^{h+n-1} v^t [{}_tp_x + f((1 - {}_tp_x) {}_tp_y)] \\
 &= \sum_{t=h}^{h+n-1} v^t {}_tp_x + f \left(\sum_{t=h}^{h+n-1} v^t {}_tp_y - \sum_{t=h}^{h+n-1} v^t {}_tp_{x:y} \right) \\
 &= {}_h|n\ddot{a}_x + f({}_h|n\ddot{a}_y - {}_h|n\ddot{a}_{x:y})
 \end{aligned}$$

Rentas vitalicias fraccionadas

En el mercado asegurador y en la Seguridad Social las rentas vitalicias suelen tener una periodicidad mensual.

De manera general, si la unidad monetaria, en vez de ser abonada al inicio de cada año, se abona fraccionada, es decir, una cantidad de $\frac{1}{k}$ unidades monetarias en cada fracción k del año, sujeto a supervivencia, entonces el valor actual actuarial se denota como ${}_h|n\ddot{a}_x^{(k)}$ donde el superíndice (k) está haciendo referencia al número de fracciones, y se calcula como:

$${}_h|n\ddot{a}_x^{(k)} = \sum_{t=h}^{h+n-1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{k} {}_{t+\frac{s}{k}}E_x,$$

Dado que las tablas de mortalidad están construidas con bases anuales, se torna necesario asumir alguna hipótesis. Normalmente en las compañías de seguros se trabaja con la interpolación lineal del factor de actualización actuarial a lo largo de cada año. Bajo esta hipótesis, la relación entre el valor actual actuarial de la renta vitalicia fraccionada ${}_h|n\ddot{a}_x^{(k)}$ y la correspondiente renta vitalicia anual ${}_h|n\ddot{a}_x$ resulta:

$${}_h|n\ddot{a}_x^{(k)} = {}_h|n\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} [{}_hE_x - {}_{h+n}E_x].$$

Se puede demostrar que se llega al mismo resultado si se aproxima la expresión trabajando con la fórmula de *Woolhouse* (ver por ejemplo (Jordan 1991) o Bowers et al. (1997)).

Por último, de manera análoga a lo comentado para la renta vitalicia individual, en el caso de rentas vitalicias sobre dos personas, la equivalencia resulta:

$${}_h|n\ddot{a}_{x:y}^{(k)} = {}_h|n\ddot{a}_{x:y} - \frac{k-1}{2k} [{}_hE_{x:y} - {}_{h+n}E_{x:y}].$$

4.3 Análisis de casos

Tal como se desprende de lo explicado en la Sección 4.2, hay dos cuestiones esenciales sobre el valor actuarial de la vida: una vinculada con el componente biométrico, y la otra con el componente financiero. A estas dos cuestiones se las conoce como *bases técnicas* y constituyen las dos hipótesis fundamentales en toda valoración actuarial sobre la vida. El riesgo de longevidad está relacionado con el desvío sistemático asociado a la primera de estas dos hipótesis.

En esta sección se presentan 3 casos, con el objetivo de cuantificar el impacto que el riesgo de longevidad puede ocasionar a lo largo del tiempo debido a una calibración incorrecta de una tabla de mortalidad.

Para este análisis se ha trabajado con diferentes tablas de mortalidad de España: una tabla de mortalidad estática relativamente actual extraída de la *Human Mortality Database*, y cuatro tablas de mortalidad dinámicas construidas con las cuatro metodologías para proyectar mortalidad propuestas en esta Tesis.

En las tablas de mortalidad construidas se ha establecido $\omega = 116$, y las probabilidades de fallecimiento entre los 100 y 115 años de edad se han obtenido mediante interpolación exponencial entre los respectivos valores de q_{100} en cada tabla y el valor establecido $q_{115} = 1$.

En las Tablas 4.1 y 4.2 se muestran las tablas de mortalidad para hombres y para mujeres, respectivamente. El contenido de cada columna es el siguiente:

- (1) Edad.
- (2) Tabla de mortalidad *por período* (fuente: *Human Mortality Database*).
- (3) Tabla de mortalidad *por cohorte* construida con el modelo jerárquico bayesiano propuesto en la Sección 2.3.

(4) Tabla de mortalidad *por cohorte* construida con la metodología *data cloning* propuesta en la Sección 2.4.

(5) Tabla de mortalidad *por cohorte* construida con la metodología de *model assembling* basada en los pesos de Akaike propuesta en la Sección 3.2.

(6) Tabla de mortalidad *por cohorte* construida con *Bayesian model averaging* propuesto en la Sección 3.3.

La tabla de mortalidad *por período* de la columna 2 corresponde al año 2010. En tanto que la tablas de mortalidad *por cohorte* de las columnas 3 a 6 corresponden a la generación de 1950, es decir, a personas que tenían 60 años de edad en el año 2010.

	TM Período 2010	TM por cohorte para la generación de 1950 (60 años de edad en 2010)			
Edad	HMD	Data Cloning	Jerárquico Bayes	Akaike weights	BMA
60	0,00868	0,00856	0,00863	0,00883	0,00919
61	0,00921	0,00918	0,00919	0,00960	0,00967
62	0,01065	0,00936	0,00940	0,01023	0,01002
63	0,01097	0,01017	0,01024	0,01109	0,01074
64	0,01215	0,01085	0,01095	0,01183	0,01141
65	0,01304	0,01159	0,01174	0,01293	0,01218
66	0,01429	0,01256	0,01272	0,01394	0,01289
67	0,01553	0,01348	0,01368	0,01476	0,01384
68	0,01612	0,01425	0,01437	0,01601	0,01442
69	0,01774	0,01599	0,01626	0,01772	0,01551
70	0,02051	0,01655	0,01680	0,01866	0,01608
71	0,02176	0,01882	0,01903	0,02055	0,01723
72	0,02532	0,01915	0,01939	0,02179	0,01867
73	0,02695	0,02130	0,02157	0,02382	0,01941
74	0,02921	0,02314	0,02360	0,02577	0,02141
75	0,03288	0,02589	0,02605	0,02825	0,02354
76	0,03582	0,02828	0,02894	0,03072	0,02495
77	0,04086	0,03203	0,03276	0,03363	0,02776
78	0,04515	0,03362	0,03426	0,03595	0,03093
79	0,05088	0,03971	0,04009	0,04009	0,03216
80	0,05700	0,04259	0,04350	0,04336	0,03633
81	0,06557	0,05077	0,05145	0,04879	0,03881
82	0,07124	0,05254	0,05343	0,05159	0,04722
83	0,08250	0,06019	0,06145	0,05664	0,04822
84	0,08790	0,06385	0,06544	0,06076	0,05630
85	0,09894	0,07411	0,07538	0,06746	0,06457
86	0,10887	0,08310	0,08410	0,07362	0,07383
87	0,12108	0,09425	0,09500	0,08121	0,07646
88	0,13652	0,10166	0,10278	0,08667	0,09946
89	0,14793	0,11744	0,11499	0,09762	0,09072
90	0,17273	0,13089	0,12956	0,10453	0,11765
91	0,18546	0,17219	0,16024	0,12319	0,09575
92	0,20905	0,17480	0,16813	0,12823	0,11872
93	0,22615	0,20247	0,18614	0,14054	0,16982
94	0,22791	0,21386	0,20176	0,14923	0,16365
95	0,25825	0,23339	0,22006	0,16126	0,19810
96	0,27869	0,25820	0,23235	0,17438	0,20474
97	0,29956	0,28475	0,25171	0,18822	0,22425
98	0,32070	0,31275	0,27333	0,20262	0,22924
99	0,34195	0,34226	0,29154	0,21753	0,26237
100	0,36312	0,37305	0,31313	0,23323	0,23883
101	0,38406	0,39840	0,33834	0,25700	0,26275
102	0,40459	0,42547	0,36557	0,28319	0,28908
103	0,42457	0,45437	0,39499	0,31205	0,31803
104	0,44387	0,48525	0,42678	0,34385	0,34989
105	0,46237	0,51822	0,46113	0,37890	0,38494
106	0,47998	0,55343	0,49824	0,41751	0,42350
107	0,49663	0,59103	0,53834	0,46006	0,46592
108	0,51227	0,63119	0,58167	0,50695	0,51260
109	0,52688	0,67407	0,62848	0,55862	0,56394
110	1	0,71987	0,67906	0,61555	0,62044
111		0,76878	0,73372	0,67828	0,68259
112		0,82102	0,79277	0,74741	0,75096
113		0,8768	0,85657	0,82358	0,82619
114		0,93638	0,92551	0,90751	0,90895
115		1	1	1	1

Tabla 4.1: Tabla de mortalidad período 2010 y tablas de mortalidad proyectadas para la cohorte de 1950 (60 años de edad en 2010) - Hombres.

	TM Período 2010	TM por cohorte para la generación de 1950 (60 años de edad en 2010)			
Edad	HMD	Data Cloning	Jerárquico Bayes	Akaike weights	BMA
60	0,00348	0,00312	0,00314	0,00311	0,00332
61	0,00345	0,00344	0,00346	0,00342	0,00355
62	0,00401	0,00352	0,00353	0,00368	0,00369
63	0,00411	0,00379	0,00382	0,00395	0,00396
64	0,00466	0,00403	0,00405	0,00431	0,00421
65	0,00475	0,00431	0,00433	0,00471	0,00449
66	0,0056	0,00472	0,00474	0,0051	0,00484
67	0,00623	0,00503	0,00506	0,00554	0,00511
68	0,0066	0,0054	0,00541	0,00596	0,00546
69	0,00727	0,00643	0,00645	0,00681	0,00626
70	0,00876	0,0065	0,00653	0,00718	0,00639
71	0,00979	0,00771	0,00774	0,00825	0,00724
72	0,01063	0,00788	0,00791	0,00888	0,00754
73	0,01254	0,00898	0,00903	0,00985	0,00834
74	0,01355	0,0101	0,01014	0,01088	0,00915
75	0,01603	0,01143	0,01149	0,01213	0,01003
76	0,01832	0,01305	0,01311	0,01347	0,01103
77	0,02082	0,01528	0,01538	0,01521	0,01255
78	0,0241	0,01653	0,01659	0,01659	0,01375
79	0,02862	0,02068	0,0208	0,01946	0,01583
80	0,03246	0,02257	0,02267	0,02139	0,01772
81	0,03796	0,02916	0,02947	0,02508	0,02088
82	0,04308	0,03041	0,03058	0,02702	0,02273
83	0,05067	0,03765	0,03801	0,03113	0,0267
84	0,05695	0,04108	0,04144	0,03396	0,02896
85	0,06791	0,05014	0,05044	0,03889	0,0347
86	0,07543	0,05871	0,05944	0,04395	0,0398
87	0,08705	0,07003	0,07088	0,04947	0,0488
88	0,10158	0,07975	0,07995	0,05535	0,05426
89	0,11247	0,09706	0,09902	0,06397	0,06399
90	0,13319	0,10622	0,10799	0,06925	0,07331
91	0,14274	0,15455	0,15071	0,08595	0,08467
92	0,16198	0,14844	0,14971	0,08855	0,09181
93	0,18001	0,18378	0,17961	0,10146	0,11464
94	0,20301	0,19921	0,19499	0,11013	0,11395
95	0,22122	0,2254	0,22292	0,12233	0,14853
96	0,24391	0,25796	0,24846	0,13589	0,15614
97	0,26752	0,29368	0,27515	0,15055	0,16546
98	0,29184	0,33289	0,3045	0,16608	0,18141
99	0,31663	0,37473	0,33298	0,18253	0,21267
100	0,34159	0,41924	0,3587	0,20001	0,20311
101	0,36647	0,44426	0,38408	0,22266	0,22588
102	0,39097	0,47076	0,41124	0,24788	0,25121
103	0,41486	0,49885	0,44034	0,27595	0,27938
104	0,43788	0,52862	0,47149	0,30721	0,3107
105	0,45985	0,56016	0,50484	0,342	0,34553
106	0,4806	0,59358	0,54055	0,38074	0,38427
107	0,50003	0,629	0,57879	0,42386	0,42736
108	0,51805	0,66653	0,61974	0,47187	0,47527
109	0,53465	0,70629	0,66358	0,52531	0,52856
110	1	0,74844	0,71052	0,58481	0,58782
111		0,79309	0,76078	0,65105	0,65373
112		0,84041	0,8146	0,72479	0,72702
113		0,89056	0,87223	0,80687	0,80853
114		0,94369	0,93393	0,89826	0,89918
115		1	1	1	1

Tabla 4.2: Tabla de mortalidad período 2010 y tablas de mortalidad proyectadas para la cohorte de 1950 (60 años de edad en 2010) - Mujeres.

4.3.1 Renta vitalicia individual

En este primer análisis se considera el caso de una renta vitalicia individual, como podría ser una prestación por jubilación de la Seguridad Social, una pensión de un plan de pensiones privado, o la suscripción de una hipoteca inversa por parte del propietario de una vivienda.

A modo de ejemplo, se considera un hombre español de 65 años de edad y se analiza el hipotético caso en que esta persona invierte 100 mil euros en la suscripción de una renta vitalicia mensual. A efectos de centrar la atención en el impacto del riesgo de longevidad, se simplifica el ejemplo suponiendo que la suscripción es a prima única, no se consideran gastos, y que la renta es inmediata ($h = 0$) e ilimitada ($n = \omega - x$).

Para determinar el valor de la renta vitalicia mensual se plantea la equivalencia:

$$100.000 = 12 \times R \times \ddot{a}_{65(H)}^{(12)},$$

donde R es el valor de la renta vitalicia mensual y el subíndice (H) indica que el operador es calculado con la tabla de mortalidad de hombres.

La gran mayoría de compañías de seguros trabajan con tablas de mortalidad estáticas. Por tanto, en los ejemplos de este capítulo, las valoraciones de las rentas vitalicias se hacen con los datos disponibles más recientes de mortalidad de España. Así, tomando como bases técnicas la tabla de mortalidad de la columna (2) de la Tabla 4.1 (mortalidad masculina en España en 2010), y un tipo de interés técnico del 4% anual, resulta:

$$\ddot{a}_{65(H)}^{(12)} = 12,44097$$

Luego, el valor de la renta vitalicia mensual asciende a

$$R = 669,83$$

Habiendo notado que la mortalidad ha ido mejorando a lo largo del tiempo, muy probablemente la mortalidad de esta persona sea mejor de lo que se asume en las bases técnicas, lo cual probablemente llevará a la compañía a tener que aportar capital propio en algún momento para poder hacer frente a los compromisos que asumió. Es decir, es probable que tenga que hacer más pagos de la renta vitalicia que lo que esperaba al momento de suscribir el contrato, y eso le ocasionará un resultado técnico negativo.

De acuerdo a las cuatro metodologías propuestas en esta Tesis, el valor actual actuarial de los compromisos futuros que asumió la compañía con su asegurado resulta ser

$$V = 12 \times 669,83 \times \ddot{a}_{65(H)}^{*(12)},$$

donde el asterisco en el supraíndice del operador $\ddot{a}_x^{(k)}$ indica que éste está siendo calculado con una tabla de mortalidad dinámica.

Si se trabaja con las tablas de mortalidad de las columnas 3, 4, 5 y 6 de la Tabla 4.1, que se corresponden con las cuatro metodologías propuestas en esta Tesis, el valor actual actuarial de los compromisos futuros, y por tanto, la reserva que debería constituir la compañía, se muestra en la Tabla 4.3.

Modelo propuesto	Operador $\ddot{a}_{65(H)}^{*(12)}$	Reserva necesaria
Jerárquico Bayes	13,21026	106.183,52
Data Cloning	13,18886	106.011,55
Akaike Weights	13,21628	106.231,91
Bayesian Model Averaging	13,60872	109.386,36

Tabla 4.3: Valor actual actuarial de la cobertura del caso 1 de acuerdo a las cuatro metodologías propuestas para proyectar mortalidad.

La diferencia entre estos valores y los 100 mil euros que paga de prima pura única el asegurado al momento inicial representa para la compañía el valor actual de la pérdida técnica esperada que debe asumir la compañía de seguros a lo largo del tiempo atribuible al riesgo de longevidad.

4.3.2 Renta vitalicia extensiva a un tercero

En este segundo análisis se considera una renta vitalicia individual que ofrece la posibilidad de ser extendida a un tercero, en caso de fallecimiento del titular.

A modo de ejemplo, se considera un matrimonio compuesto por un hombre español de 65 años y una mujer española de 60, y se analiza el hipotético caso en que el hombre invierte 100 mil euros en la suscripción de una renta vitalicia extensiva en un 70% a su mujer en forma de pensión por viudez en caso de fallecimiento de él. Nuevamente, a efectos de centrar la atención en el impacto del riesgo de longevidad, se simplifica el ejemplo suponiendo que la suscripción es a prima única, no se consideran gastos, y que la renta es inmediata ($h = 0$) e ilimitada ($n = \omega - x$).

Para determinar el valor de la renta vitalicia mensual del titular, extensiva en un 70% a la cónyuge superviviente en caso de fallecimiento del titular, se plantea la equivalencia:

$$100.000 = 12 \times R \times \ddot{a}_{65(H) \rightarrow 60(M)},$$

donde R es el valor de la renta vitalicia mensual y los subíndices (H) y (M) indican que el operador es calculado con la tabla de mortalidad de hombres para persona de edad 65 y con la tabla de mortalidad de mujeres para la persona de edad 60.

Tomando como bases técnicas la tabla de mortalidad de la columna (2) de la Tabla 4.1 (mortalidad masculina en España en 2010), la tabla de mortalidad de la columna (2) de la Tabla 4.2 (mortalidad femenina en España en 2010), y un tipo de interés técnico del 4% anual, resulta:

$$\ddot{a}_{65(H) \rightarrow 60(M)} = 15,59716$$

Luego, el valor de la renta vitalicia mensual asciende a

$$R = 534,29$$

Por lo mencionado previamente, muy probablemente la mortalidad de las dos personas sea mejor de lo que se asume en las bases técnicas, lo cual probablemente llevará a la compañía a tener que aportar capital propio en algún momento para poder hacer frente a los compromisos que asumió.

De acuerdo a las cuatro metodologías propuestas en esta Tesis, el valor actual actuarial de los compromisos futuros que la compañía asumió resulta ser

$$V = 12 \times 534,29 \times \ddot{a}_{65_{(H)} \rightarrow 60_{(M)}}^{*(12)},$$

donde el asterisco en el supraíndice indica que el operador $\ddot{a}_{x \rightarrow y}^{(k)}$ está siendo calculado con tablas de mortalidad dinámicas.

Si se trabaja con las tablas de mortalidad de las columnas 3, 4, 5, y 6 de las Tablas 4.2 y 4.2, que se corresponden con las cuatro metodologías propuestas en esta Tesis, el valor actual actuarial de los compromisos futuros, y por tanto, la reserva que debería constituir la compañía, se muestra en la Tabla 4.4.

Modelo propuesto	Operador $\ddot{a}_{65_{(H)} \rightarrow 60_{(M)}}^{*(12)}$	Reserva necesaria
Jerárquico Bayes	16,19817	103.853,27
Data Cloning	16,19794	103.851,85
Akaike Weights	16,54850	106.099,39
Bayesian Model Averaging	16,76598	107.493,79

Tabla 4.4: Valor actual actuarial de la cobertura del caso 2 de acuerdo a las cuatro metodologías propuestas para proyectar mortalidad.

La diferencia entre estos valores y los 100 mil euros que paga de prima pura única el asegurado al momento inicial representa para la compañía el valor actual de la pérdida

técnica esperada que debe asumir la compañía de seguros a lo largo del tiempo, atribuible al riesgo de longevidad.

4.3.3 Renta vitalicia de último superviviente

En este tercer análisis se considera una renta vitalicia de un grupo de 2 personas, hasta la extinción del grupo.

A modo de ejemplo, se considera un matrimonio compuesto por un hombre de 65 años y una mujer de 60 años, y se analiza el hipotético caso en que el matrimonio tiene una vivienda que pertenece a la sociedad conyugal, la cual está tasada por un valor patrimonial de 100 mil euros, y sobre la que deciden suscribir una hipoteca inversa hasta el fallecimiento de ambos. A efectos de centrar la atención en el impacto del riesgo de longevidad, se simplifica el ejemplo no considerando los gastos asociados a la operación.

Para determinar el valor de la renta vitalicia mensual a percibir mientras viva al menos uno de los dos, se plantea la equivalencia:

$$100.000 = 12 \times R \times \ddot{a}_{65(H):60(M)}^{(12)},$$

donde R es el valor de la renta vitalicia mensual y los subíndices (H) y (M) indican que el operador es calculado con la tabla de mortalidad de hombres para la persona de edad 65 y con la tabla de mortalidad de mujeres para la persona de edad 60.

Tomando como bases técnicas la tabla de mortalidad de la columna (2) de la Tabla 4.1 (mortalidad masculina en España en 2010), la tabla de mortalidad de la columna (2) de la Tabla 4.2 (mortalidad femenina en España en 2010), y un tipo de interés técnico del 4% anual, resulta:

$$\ddot{a}_{65(H):60(M)}^{(12)} = 16,94982$$

Luego, el valor de la renta vitalicia mensual asciende a

$$R = 491,65$$

En este caso también, muy probablemente la mortalidad de las dos personas sea mejor de lo que se asume en las bases técnicas, lo cual probablemente llevará al inversor a tener que pagar un capital mayor al que preveía al momento de la suscripción de la hipoteca inversa.

De acuerdo a las cuatro metodologías propuestas en esta Tesis, el valor actual actuarial de los compromisos futuros que asumió el inversor resulta ser

$$V = 12 \times 491,65 \times \ddot{a}_{65(H):60(M)}^{*(12)},$$

donde el asterisco en el supraíndice indica que el operador $\ddot{a}_{x:y}^{(k)}$ está siendo calculado con una tabla de mortalidad dinámica.

Si se trabaja con las tablas de mortalidad de las columnas 3, 4, 5, y 6 de las Tablas 4.1 y 4.2, que se corresponden con las cuatro metodologías propuestas en esta Tesis, el valor actual actuarial de los compromisos futuros se muestra en la Tabla 4.5.

Modelo propuesto	Operador $\ddot{a}_{65(H):60(M)}^{*(12)}$	Reserva Necesaria
Jerárquico Bayes	17,47870	103.120,26
Data Cloning	17,48755	103.172,49
Akaike Weights	17,97659	106.057,70
Bayesian Model Averaging	18,11909	106.898,45

Tabla 4.5: Valor actual actuarial de la cobertura del caso 3 de acuerdo a las cuatro metodologías propuestas para proyectar mortalidad

La diferencia entre estos valores y los 100 mil euros que paga de prima pura única el asegurado al momento inicial representa para la compañía el valor actual de la pérdida

técnica esperada que debe asumir la compañía de seguros a lo largo del tiempo atribuible al riesgo de longevidad.

4.4 Consideraciones finales

En este capítulo se ha mostrado el impacto económico que el riesgo de longevidad puede ejercer sobre un contrato, cuyas bases técnicas incluyen calibraciones incorrectas de la mortalidad.

Para ello se han analizado tres casos: una renta vitalicia individual, una renta vitalicia extensiva a un tercero y una renta vitalicia de último superviviente.

En la tabla 4.6 se exponen las pérdidas técnicas esperadas como porcentaje de la inversión inicial, para los 3 casos analizados y según cada metodología propuesta para proyectar mortalidad.

Modelo propuesto	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Jerárquico Bayes	6,18%	3,85%	3,12%
Data Cloning	6,01%	3,85%	3,17%
Akaike Weights	6,23%	6,10%	6,06%
Bayesian Model Averaging	9,39%	7,49%	6,90%

Tabla 4.6: Pérdidas técnicas esperadas según los modelos propuestos

Es importante remarcar que los casos de análisis planteados en este capítulo constituyen meros ejemplos de pólizas de seguros o contratos entre partes considerados individualmente. Por supuesto, las compañías de seguros, según su tamaño, suelen contar con carteras que contienen desde decenas de miles a millones de pólizas. Y debido a que el riesgo de longevidad por su naturaleza sistemática afecta a todas las pólizas de la cartera, los valores de las pérdidas esperadas ascienden a cifras muy elevadas. Por tanto, es de vital importancia tomar medidas pertinentes para mitigar este riesgo cuyas consecuencias ya están a la vista.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1 Resumen de las aportaciones de la Tesis

En esta Tesis se han propuesto cuatro metodologías para proyectar mortalidad con el objetivo de mitigar el riesgo de longevidad. El primer conjunto de propuestas se ha basado en el planteamiento de especificaciones jerárquicas, el segundo en la aplicación de metodologías de *model assembling* y, en ambos conjuntos, se han formulado especificaciones de modelos de proyección de mortalidad y propuestas metodológicas tanto clásicas como bayesianas. En la Tabla 5.1 se sintetizan las metodologías propuestas para proyectar mortalidad según el tipo de propuesta y el enfoque estadístico aplicado.

	Enfoque clásico	Enfoque bayesiano
Modelos Jerárquicos	<i>Data Cloning</i>	Modelo Jerárquico Bayesiano
Metodologías de <i>model assembling</i>	Método basado en los pesos de Akaike	<i>Bayesian Model Averaging</i>

Tabla 5.1: Síntesis de las metodologías propuestas para proyectar mortalidad.

Si bien las cuatro metodologías propuestas habían sido aplicadas en diferentes áreas de conocimiento con anterioridad, han sido aplicadas por primera vez (hasta donde se tiene

conocimiento) para la proyección de mortalidad (y en el ámbito actuarial en general) en esta Tesis.

Con los modelos jerárquicos se ha propuesto proyectar la mortalidad para varios países simultáneamente tomando como punto de partida un único modelo clásico. Mientras que con las técnicas de *model assembling* se ha propuesto proyectar la mortalidad para un único país trabajando simultáneamente con varios modelos habitualmente empleados en seguros.

En particular, dentro de la propuesta de trabajo con modelos jerárquicos, se ha propuesto una extensión del modelo de Lee-Carter mediante una especificación jerárquica para proyectar las tasas centrales de mortalidad de un conjunto de países relacionados y con estructuras socio-demográficas semejantes. Esta especificación jerárquica del modelo de Lee-Carter refleja la relación demográfica entre los países por medio de dos instrumentos. Por un lado, la existencia de un factor de mejora de la mortalidad latente común a las poblaciones consideradas. Y por otro, las poblaciones comparten los mismos hiperparámetros en la segunda jerarquía de la estructura. Así, la especificación propuesta permite proyectar la mortalidad de cada población con más información que la aporta su propia historia, puesto que las inferencias incorporan de manera indirecta información de la mejora de la mortalidad de países semejantes y vinculados demográficamente.

Los modelos jerárquicos típicamente han sido utilizados bajo el enfoque bayesiano. Este enfoque, si bien ha demostrado muy buenos resultados, implica la determinación de las distribuciones a priori de los parámetros e hiperparámetros del modelo, las cuales no siempre se encuentran disponibles. Con frecuencia esto lleva al analista a tener que establecer supuestos sobre la información a priori, que aunque sean vagamente informativas, inevitablemente implican la introducción de un componente subjetivo. Así, como una alternativa, se ha presentado la metodología *data cloning* para superar esta limitación y obtener estimadores de máxima verosimilitud en un contexto jerárquico.

Por otro lado, en relación a las metodologías de *model assembling*, éstas permiten trabajar

con varios modelos simultáneamente sin tener fijar uno como el *mejor* y descartando al resto de modelos. De esta manera se tiene en cuenta, además de la incertidumbre asociada a los parámetros del modelo, la incertidumbre asociada a la selección del mismo.

Bajo el enfoque clásico se ha trabajado con un método que consiste en generar una combinación lineal de los modelos considerados asignando pesos basados en el criterio de información de Akaike, mostrándose que el modelo final ensamblado genera proyecciones de mortalidad con menos sesgo y más precisión que los diferentes modelos considerados por separado sobre el mismo conjunto de datos. En cuanto al enfoque bayesiano, se han propuesto (por primera vez) especificaciones bayesianas de varios de los modelos de proyección de mortalidad que son tradicionales en la literatura bajo la óptica clásica. Asimismo, el ensamble mediante el *Bayesian Model Averaging* también ha arrojado proyecciones muy satisfactorias.

Habiendo evaluado la capacidad proyectiva de la mortalidad con cada una de las metodologías propuestas, se han realizado proyecciones de la mortalidad a largo plazo y se ha concluido que caben esperar en las próximas décadas mejoras sustanciales en la mortalidad de la tercera edad en los países considerados bajo análisis (Francia, Italia, Portugal y España).

Asimismo, haciendo uso de las tablas de mortalidad proyectadas con las diferentes propuestas y mediante la exposición de diferentes casos, se ha ejemplificado el impacto económico que la calibración incorrecta de las tablas de mortalidad puede generar a las instituciones responsables de garantizar los fondos necesarios para las personas que alcanzan la edad de retiro. Este punto es de vital importancia, no sólo para el ambiente corporativo sino también para la sociedad en general. La situación de insolvencia de este tipo de instituciones repercute directamente sobre las personas. La insuficiencia de recursos producto de una mala previsión puede terminar generando un grave perjuicio a aquéllos que durante toda su vida han estado ahorrando y haciendo aportaciones a los sistemas de jubilaciones y pensiones. Así, al llegar a la edad de jubilación pueden

encontrarse con que el resultado del esfuerzo hecho a lo largo de toda una vida se vea reducido o incluso que ya no exista.

Por todo lo anterior, las metodologías propuestas en esta Tesis se proponen para ser aplicadas por actuarios en ejercicio en las aseguradoras, así como por quienes ocupan cargos de análisis técnico y planificación de sistemas de jubilaciones y pensiones, tanto públicos como privados.

5.2 Futuras líneas de investigación

Tradicionalmente, el riesgo más estudiado por los actuarios vinculados a temas de vida ha sido el riesgo de mortalidad. En los últimos años ha surgido una gran cantidad de estudios sobre el riesgo de longevidad; y aún quedan áreas de riesgo por ser exploradas que están muy vinculados con las anteriores, donde los actuarios pueden hacer desarrollos que tengan como objetivo contribuir, en última instancia, al bienestar social.

Así, las futuras líneas de investigación que se desarrollarán están enfocadas al ámbito vida de la estadística actuarial (estadística actuarial vida) en un sentido más amplio.

El envejecimiento de las sociedades y la mayor longevidad de la población son claros signos de mejora en los sistemas de salud y progreso social. Pero, a la vez, presentan nuevos retos a las compañías de seguros de vida y a los Estados. Asociados a estos signos de progreso, se plantean nuevos riesgos, como son los de morbilidad y dependencia (ver Albarrán-Lozano et al. (2016)), que hay tener en cuenta para gestionar y cubrir de manera adecuada. Así, se pretenden extrapolar algunas de las metodologías utilizadas en esta Tesis (Lele et al. (2007), Burnham and Anderson (2003), Hoeting et al. (1999)), a esta clase de riesgos que han sido menos estudiados.

Como metodologías alternativas se pretende explorar la aplicación del análisis funcional de datos, siguiendo la línea de trabajo propuesta por Hyndman and Ullah (2007), que

permite obtener proyecciones suavizadas y robustas, y también la utilización de modelos no lineales mediante filtros de partículas (SMC) (ver Candy (2011)) para predecir y proyectar mortalidad, longevidad, morbilidad y dependencia.

Por otro lado, la caída de los tipos de interés a nivel mundial también presenta desafíos en el campo actuarial, sobre todo en el caso de coberturas de largo plazo, como las rentas vitalicias tratadas en esta Tesis.

Como se ha comentado en el capítulo 4, las dos hipótesis fundamentales en los seguros de personas son las referidas a la evolución de los factores biométricos y las correspondientes a los tipos de interés. Cualquier desviación significativa en cualquiera de estas dos hipótesis conlleva consecuencias económicas asociadas. Por tanto, se considera de gran importancia la correcta calibración de ambos tipos de modelos, tanto biométricos como financieros.

En todos los casos, el objetivo es generar predicciones y proyecciones precisas sobre la ocurrencia de determinados siniestros o eventos que den lugar a prestaciones y facilitar, así, una correcta tarificación y valoración del coste de los servicios de cobertura de los diferentes tipos de contingencias.

La puesta en marcha de dicho objetivo procura velar por la solvencia de las compañías de seguros y de los sistemas de Seguridad Social y, en definitiva, por el bienestar de la sociedad en general.

Referencias

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control* 19(6), 716–723.
- Albarrán-Lozano, I., P. J. Alonso-González, and A. Arribas-Gil (2016). Dependence evolution in the spanish disabled population: a functional data analysis approach, DOI: 10.1111/rssa.12228. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*.
- Albarrán-Lozano, I., F. A. Rodríguez, V. M. C. Juárez, and M. L. Durbán (2015). *El riesgo de longevidad y su aplicación práctica a Solvencia II: modelos actuariales avanzados para su gestión*. Ed. Fundación MAPFRE.
- Alho, J. and B. Spencer (2006). *Statistical demography and forecasting*. Springer Science & Business Media.
- Benjamin, B. and J. Pollard (1993). *The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics*. The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, Oxford.
- Blake, D., A. Cairns, K. Dowd, and R. MacMinn (2006). Longevity bonds: financial engineering, valuation, and hedging. *Journal of Risk and Insurance* 73(4), 647–672.
- Booth, H. (2006). Demographic forecasting: 1980 to 2005 in review. *International Journal of Forecasting* 22(3), 547–581.
- Booth, H., J. Maindonald, and L. Smith (2002). Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline. *Population Studies* 56(3), 325–336.

- Booth, H. and L. Tickle (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *Annals of actuarial science* 3(1-2), 3–43.
- Bowers, N. L., H. Gerber, J. Hickman, D. Jones, and C. Nesbitt (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries.
- Brooks, S. and B. Morgan (1995). Optimization using simulated annealing. *Statistician* 44, 241–254.
- Buckland, S. T., K. P. Burnham, and N. H. Augustin (1997). Model selection: an integral part of inference. *Biometrics* 53(2), 603–618.
- Burnham, K. P. and D. R. Anderson (2003). *Model selection and multimodel inference: a practical information-theoretic approach*. Springer Science & Business Media.
- Cade, B. S. (2015). Model averaging and muddled multimodel inferences. *Ecology* 96(9), 2370–2382.
- Cairns, A., D. Blake, and K. Dowd (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *The Journal of Risk and Insurance* 73(4), 687–718.
- Cairns, A. J., D. Blake, K. Dowd, G. D. Coughlan, D. Epstein, and M. Khalaf-Allah (2011). Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics* 48(3), 355–367.
- Cairns, A. J., D. Blake, K. Dowd, G. D. Coughlan, D. Epstein, A. Ong, and I. Balevich (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal* 13(1), 1–35.
- Candy, J. V. (2011). *Bayesian signal processing: Classical, modern and particle filtering methods*, Volume 54. John Wiley & Sons.
- Carpenter, B., A. Gelman, M. Hoffman, D. Lee, B. Goodrich, M. Betancourt, M. A. Brubaker, J. Guo, P. Li, and A. Riddell (2015).

- Stan: a probabilistic programming language. *Journal of Statistical Software*. URL <http://www.wvm.edu/bbeckage/Teaching/DataAnalysis/Manuals/stan-resubmit-JSS1293.pdf>.
- Carter, L. R. and R. D. Lee (1992). Modeling and forecasting us sex differentials in mortality. *International Journal of Forecasting* 8(3), 393–411.
- Caswell, H. (2001). *Matrix population models*. Wiley Online Library.
- Chib, S. (1995). Marginal likelihood from the Gibbs output. *Journal of the American Statistical Association* 90(432), 1313–1321.
- Cox, S. H., Y. Lin, and H. Pedersen (2010). Mortality risk modeling: Applications to insurance securitization. *Insurance: Mathematics and Economics* 46(1), 242–253.
- Culka, M. (2016). Uncertainty analysis using bayesian model averaging: a case study of input variables to energy models and inference to associated uncertainties of energy scenarios. *Energy, Sustainability and Society* 6(1), 1.
- Currie, I. (2006). Smoothing and forecasting mortality rates with p-splines. URL <http://www.macs.hw.ac.uk/~iain/research/talks/Mortality.pdf>.
- Currie, I. D., M. Durban, and P. H. Eilers (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical modelling* 4(4), 279–298.
- Czado, C., A. Delwarde, and M. Denuit (2005). Bayesian Poisson log-bilinear mortality projections. *Insurance: Mathematics and Economics* 36(3), 260–284.
- Dellaportas, P., A. Smith, and P. Stavropoulos (2011). Bayesian analysis of mortality data. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 164(2), 275–289.
- Delwarde, A., M. Denuit, M. Guillén, and A. Vidiella-i Anguera (2006). Application of the poisson log-bilinear projection model to the g5 mortality experience. *Belgian Actuarial Bulletin* 6(1), 54–68.
- Draper, D. (1995). Assessment and propagation of model uncertainty. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 45–97.

- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics* 7, 1–26.
- England, P. and R. Verrall (1999). Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: mathematics and economics* 25(3), 281–293.
- Felipe, A., M. Guillén, and A. Perez-Marin (2002). Recent mortality trends in the spanish population. *British Actuarial Journal* 8(04), 757–786.
- Forfar, D., J. McCutcheon, and A. Wilkie (1988). On graduation by mathematical formula. *Journal of the Institute of Actuaries* 115(01), 1–149.
- Fung, M. C., G. W. Peters, and P. V. Shevchenko. A unified approach to mortality modelling using state-space framework: characterisation, identification, estimation and forecasting. *Identification, Estimation and Forecasting, year=2016*.
- Gelman, A., J. B. Carlin, H. S. Stern, and D. B. Rubin (2014). *Bayesian data analysis*, Volume 2. Taylor & Francis.
- Gerland, P., A. Raftery, et al. (2014). World population stabilization unlikely this century. *Science* 346(6206), 234–237.
- Giroi, F. and G. King (2008). *Demographic forecasting*. Princeton University Press.
- Haberman, S. and A. Renshaw (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics* 48(1), 35–55.
- Heligman, L. and J. Pollard (1980). The age pattern of mortality. *Journal of Institute of Actuaries* 107, 49–80.
- Hoedemakers, T., J. Beirlant, M. J. Goovaerts, and J. Dhaene (2003). Confidence bounds for discounted loss reserves. *Insurance: Mathematics and Economics* 33(2), 297–316.
- Hoeting, J. A. (2002). Methodology for Bayesian model averaging: an update. In *International Biometrics Conference Proceedings*. URL <http://www.stat.colostate.edu/~jah/papers/ibcbma.pdf>.

- Hoeting, J. A., D. Madigan, A. E. Raftery, and C. T. Volinsky (1998). Bayesian model averaging. In *Proceedings of the AAAI Workshop on Integrating Multiple Learned Models*, pp. 77–83. Citeseer.
- Hoeting, J. A., D. Madigan, A. E. Raftery, and C. T. Volinsky (1999). Bayesian model averaging: a tutorial. *Statistical science*, 382–401.
- Hyndman, R. J., H. Booth, L. Tickle, and J. Maindonald. (2014). *demography: Forecasting mortality, fertility, migration and population data*. R package version 1.18.
- Hyndman, R. J. and M. S. Ullah (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis* 51(10), 4942–4956.
- Jordan, C. W. (1991). *Life contingencies*. Society of Actuaries.
- Kleijn, R. (2016). Essays on Bayesian model averaging using economic time series. URL <http://repub.eur.nl/pub/80127/Kleijn.pdf>. Technical report.
- Koissi, M.-C., A. F. Shapiro, and G. Högnäs (2006). Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. *Insurance: Mathematics and Economics* 38(1), 1–20.
- Lee, R. (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American actuarial journal* 4(1), 80–91.
- Lee, R. and L. Carter (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Society* 87, 659–675.
- Lele, S., B. Dennis, and F. Lutsche (2007). Data cloning: easy maximum likelihood estimation for complex ecological models using Bayesian Markov Chain Monte Carlo methods. *Ecology letters* 10, 551–563.
- Lele, S., K. Nadeem, and B. Schmuland (2010). Estimability and likelihood inference for generalized linear mixed models using data cloning. *Journal of the American Statistical Society* 105, 1617–1625.

- Li, J. et al. (2014). An application of MCMC simulation in mortality projection for populations with limited data. *Demographic Research* 30, 1–48.
- Li, N. and R. Lee (2005). Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the Lee-Carter method. *Demography* 42(3), 575–594.
- Lin, Y. and S. H. Cox (2005). Securitization of mortality risks in life annuities. *Journal of risk and Insurance* 72(2), 227–252.
- Liu, C.-A. and B.-S. Kuo (2016). Model averaging in predictive regressions. DOI: 10.1111/ectj.12063. *The Econometrics Journal*.
- London, D. (1997). *Survival models and their estimation*. ACTEX publications.
- Lutz, W., W. Sanderson, and S. Scherbov (1998). Expert-based probabilistic population projections. *Population and Development Review* 24, 139–155.
- Lutz, W., W. Sanderson, and S. Scherbov (2004). *The end of world population growth in the 21th century: new challenges for human capital formation and sustainable development*. Sterling.
- Lutz, W., W. Sanderson, and S. Scherbov (2008). II ASA’s 2007 probabilistic world population projections. II ASA world population program online data base of results 2008.
- Marín, J. M., M. T. Rodríguez-Bernal, and E. Romero (2015). Data cloning estimation of GARCH and COGARCH models. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 85(9), 1818–1831.
- Neal, R. (2011). MCMC using Hamiltonian dynamics. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, 113–162.
- Olivieri, A. (2007). Designing longevity risk transfers: the point of view of the cedant. *ICFAI Journal of Financial Risk Management* 4-March-2007, 55–83.
- Olivieri, A. and E. Pitacco (2008). Assessing the cost of capital for longevity risk. *Insurance: Mathematics and Economics* 42(3), 1013–1021.

- Pannullo, F., D. Lee, E. Wacławski, and A. H. Leyland (2016). How robust are the estimated effects of air pollution on health? accounting for model uncertainty using bayesian model averaging. *Spatial and Spatio-temporal Epidemiology* 18, 53–62.
- Pedroza, C. (2006). A Bayesian forecasting model: predicting U.S. male Mortality. *Biostatistics* 7(4), 530–550.
- Pitacco, E., M. Denuit, and S. Haberman (2009). *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business*. Oxford University Press.
- Plummer, M. et al. (2003). Jags: A program for analysis of bayesian graphical models using gibbs sampling. URL <http://citeseer.ist.psu.edu/plummer03jags.html>.
- Quenouille, M. H. (1956). Notes on bias in estimation. *Biometrika* 43(3/4), 353–360.
- R Core Team (2015). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing.
- Renshaw, A. and S. Haberman (2003). Lee–Carter mortality forecasting: A parallel generalized linear modelling approach for england and wales mortality projections. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)* 52(1), 119–137.
- Renshaw, A. and S. Haberman (2006). A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 38, 556–570.
- Renshaw, A. E. and S. Haberman (2000). *Modelling for mortality reduction factors*. City University, Department of Actuarial Science and Statistics.
- Schorning, K., B. Bornkamp, F. Bretz, and H. Dette (2016). Model selection versus model averaging in dose finding studies. DOI: 10.1002/sim.6991. *Statistics in medicine*.
- Sithole, T. Z., S. Haberman, and R. J. Verrall (2000). An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants’ and

- life office pensioners' data. *Insurance: Mathematics and Economics* 27(3), 285–312.
- Sólymos, P. (2009). dclone: Data cloning and MCMC tools for maximum likelihood methods. *R package version*, 1–0.
- Su, Y.-S. and M. Yajima (2015). *R2jags: Using R to Run 'JAGS'*. R package version 0.5-7.
- Tabeau, E., A. van den Berg Jeths, and C. Heathcote (2001). *Forecasting mortality in developed countries: Insights from a statistical, demographic and epidemiological perspective*, Volume 9. Springer Science & Business Media.
- Villegas, A. M., V. K. Kaishev, and P. Millossovich (2015). StMoMo: An R package for stochastic mortality modelling. In *7th Australasian Actuarial Education and Research Symposium*.
- Wetterstrand, W. H. (1981). Parametric models for life insurance mortality data: Gompertz's law over time. *Transactions of the Society of Actuaries* 33, 159–175.